SolEx - Corrigé du CC1

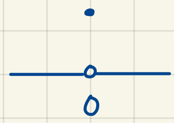
28/02
Gracey
ANALYSE 2

Sujet 1 :

- **Q du Cours** : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$

Q $f \in C^1(\mathbb{R})$ si a) f dérivable en 0 NON $\xrightarrow{\text{p. exple}}$ $x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

dériv. à gauche et à droite $\}$ b) $\underline{\underline{g}}$ $\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x)$ NON p. exple



f n'existe en 0

il suffit de voir c) $\underline{\underline{f}}$ est continue en 0 NON

further explication (exple)

$\left(\text{Soit } f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases} \right.$

$x \neq 0$, $f'(x) = 0$

alors

$\lim\limits_{x \to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) = 0$

mais f n'est pas continue en 0

$\Rightarrow$ pas dérivable. $\Big)$

Rq : a) + b) $\Rightarrow$ b) + c)

$\Rightarrow C^1$ (Thm du CM !)

- **Ex.1** $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x = 0 \\ x > 0 \end{pmatrix}$ ✓ $(x < 0)$ ×

On observe : $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$ alors suffisant de regarder $x = 0$

a) $f \in C^0$? (f continue ?)

- $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} x = 0$ $\overset{!!!\ \text{nécessaire}}{=\!=}$ $f(0) = 0$ égaux
- $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (e^x - 1) = 0$

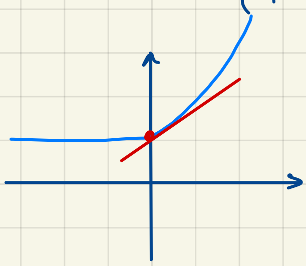
$\Big\}$ Donc, pas continue.

b) $\lim\limits_{x \to 0-} (x)' = 1$ égaux. On a les prop. b) et c) du Quest. du Cours.

$\lim\limits_{x \to 0+} (e^x - 1)' = \lim\limits_{x \to 0+} e^x = 1$

$\xRightarrow{\text{Thm en CM}}$ $f \in C^1(\mathbb{R})$

c) $g(x) := f'(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0-} g'(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x) = 1$ $\Rightarrow f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $f''(0)$ $\nexists$!



Rappel : Thm en CM. Si

$\mathbb{R} \ni \lim\limits_{x \to 0-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to 0+} f'(x) \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

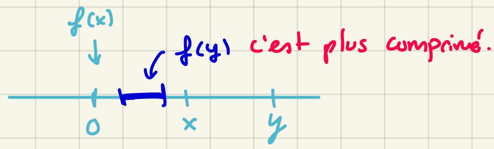
f n'est pas dérivable en 0

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \overbrace{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0}}^{\text{Déf : de la dérivée}} \overset{\text{Déf}}{=\!=} \exp'(0) = \exp(0) \equiv e^0 = 1$

• Ex.2 **Rappel:** (QdCours du Sujet 2!)

$f : I \to \mathbb{R}$ est contractante s'il $\exists\ k \in]0,1[$ t.q. $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \quad \forall x,y \in I$

p. exple : $f(x) = \frac{x}{3}$ est contractante sur $\mathbb{R}$ $(k=3)$



c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(x)$

$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f$ contractante par le TAF $(k=2)$

$\overset{\text{Thm}}{\underset{\text{en CM}}{\Rightarrow}}\ u_{n+1} = f(u_n)$ (si bien définie) a une limite, $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$

a) P. Fixe évident: $f(0) = 0$ P. Fixe $\ell = 0$

b) $g(x) = x - f(x)$ ℓ PFixe de $f \iff \ell$ un zéro de g (g str. croiss).

$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}\ \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow g$ str. croiss. $\Rightarrow 0$ est le seul zéro de g

Sujet 2:

• Ex 1 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$

$f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$ récursion bien déf. $\Rightarrow$ Recursivité bien définie

$u_0 \geq \sqrt{a}$ $\quad u_n \geq \sqrt{a}$ Montrer d'abord!

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) > \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}$

alors $f([\sqrt{a}, \infty[) \subset [a, \infty[$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \underset{(x > \sqrt{a})}{\leq} \frac{1}{2}$

f contractante sur $[\sqrt{a}, \infty[$

et alors $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell}$ P.F. de f

$f(\ell) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \overset{!}{=} \ell$

$\iff \frac{a}{\ell} = \ell \iff \boxed{\ell = \sqrt{a}}$