SolEx - Fiche TD1 - $\boxed{\text{Ex's 10 et 12}}$

31/01
Analyse 2

Exercice 10. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ des fractions rationnelles suivantes.

1. $\dfrac{X+2}{X^2+2}$,
2. $\dfrac{X^3}{X^4-1}$.

1.- $\dfrac{X+2}{X^2+2}$ Sur $\mathbb{R}$: rien à faire, c'est un élément simple.
Sur $\mathbb{C}$: X^2+2 n'est pas irréductible.

Factoriser

$X^2+2=0 \longrightarrow X_{1,2} = \pm\sqrt{2}\,i \implies \boxed{X^2+2 = (X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}$

Thm $\implies F(x) := \dfrac{X+2}{X^2+2} = \dfrac{A}{X+i\sqrt{2}} + \dfrac{B}{X-i\sqrt{2}}$ $(*)$

pour déterminer A et B (ds $\mathbb{C}$!) :

- Méthode 1: $(*)/(X^2+2) \iff X+2 = A\cdot(X-i\sqrt{2})+B(X+i\sqrt{2})$

plus longue mais marche tjs!

$(**)\ \begin{cases} 1 = A+B \\ 2 = i\sqrt{2}(B-A) \end{cases}$ $\qquad \boxed{X+2 = X\cdot(A+B)\sqrt{2}i\,(B-A)}$

$\dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{(-i)i} = \dfrac{-i}{1} = -i$

$+\begin{cases} \cancel{A}+B = 1 \\ -\cancel{A}+B = \dfrac{2}{i\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i \end{cases}$

$2B = 1-i\sqrt{2} \implies \boxed{B = \dfrac{1-i\sqrt{2}}{2}}$

$A = 1-B = \ldots$ OU $A = \bar{B} = \dfrac{1+i\sqrt{2}}{2}$

complexe conjugué

ALORS $\boxed{\dfrac{X+2}{X^2+2} = \dfrac{1+i\sqrt{2}}{2(X+i\sqrt{2})} + \text{C.C.}}$ $\longrightarrow := (\star)$

$\dfrac{1-i\sqrt{2}}{2(X-i\sqrt{2})}$

take strategic values for x!

- Méthode 2: il nous faut 2 eq's. pour les 2 inconnus A et B

par exple: $X=0$ $(*)\big|_{x=0}$ $F(0)=1$ et à droite : $\dfrac{A}{i\sqrt{2}} - \dfrac{B}{i\sqrt{2}} = \dfrac{-i\sqrt{2}A}{2} - \dfrac{i\sqrt{2}B}{2} = (-A+B)\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

$\hookrightarrow 1 = (-A+B)\dfrac{i}{\sqrt{2}} \implies \boxed{-A+B = -i\sqrt{2}}$

$X=1$ $(*)\big|_{X=1} \iff F(1) = 1 = \dfrac{A}{1+i\sqrt{2}} + \dfrac{B}{1-i\sqrt{2}} \iff \boxed{1 = \dfrac{A(1-i\sqrt{2})}{3} + \dfrac{B(1+i\sqrt{2})}{3}} \implies \ldots$

$(1+i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2}) = 1-(i\sqrt{2})^2 = 3$

- Méthode 3: (préférée)

num — supprimer

$\left[(*)\cdot(X+i\sqrt{2})\right]\Big|_{X=i\sqrt{2}} \iff \left[\dfrac{X+2}{X-i\sqrt{2}} = A\,\cancel{\left(\dfrac{B}{X-i\sqrt{2}}\right)(X+i\sqrt{2})}\right]$

DES $\qquad X = -i\sqrt{2}$

$\boxed{A = \left[\dfrac{X+2}{X-i\sqrt{2}}\right]_{X=-i\sqrt{2}} = \dfrac{-i\sqrt{2}+2}{-2i\sqrt{2}} = \dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}}$ et $B = \bar{A}$ $(\star)$

2:- $$\frac{X^3}{X^4-1} = \boxed{\frac{X^3}{X^4-1} = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X-1} + \frac{C+DX}{X^2+1}} \Leftarrow \begin{array}{l} X^4-1 = (X^2-1)(X^2+1) \\ = (X+1)\boxed{(X-1)(X^2+1)} \end{array}$$

$$\frac{X}{2(X^2+1)} + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{4(X-1)}$$

$\frac{P(X)}{Q(X)}$ || $\deg P(X) < \deg Q(X)$

• Sur $\mathbb{R}$

pour $x=-1$: $A = \frac{(-1)^3}{-2\cdot 2} = \frac{1}{4}$

pour $x=1$: $B = \frac{1^3}{2\,2} = \frac{1}{4}$

alors $$\frac{X^3}{X^4-1} = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{C+DX}{X^2+1}$$

pour :

$X=0$: $0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$

$X=2$: $\frac{8}{15} = \underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{3}} + \frac{-\frac{1}{2}+2D}{5}$ | $\cdot 15 \iff 8 = 5 - \frac{3}{2} + 6D$

$\Rightarrow \boxed{D = \frac{9}{2\,6} = \frac{3}{4}}$

Résultat :

$$\frac{X^3}{X^4-1} = \frac{1}{4(X+1)} + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{3X-2}{4(X^2+1)}$$

Correction d'une erreur + en utilisant $\mathbb{C}$

Pour A : $A = \left[\frac{X^3}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1} = \frac{-1}{-2\cdot 2} = \frac{1}{4}$ ✓

Pour B : $B = \left[\frac{X^3}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=+1} = \frac{1}{4}$ ✓

Pour C et D : $C = \left[(*)\cdot(1+X^2)\right]_{X=i} \longrightarrow \left[\frac{X^3}{(X+1)(X-1)}\right]_{X=i}$

$= C + Di + \cancel{(\dots)(1+i^2)}$

$\Rightarrow C + Di = \frac{i^3}{i^2-1} = \frac{i}{2} = \frac{i}{2} \Rightarrow C=0,\ D=\frac{1}{2}$

$\boxed{C \text{ et } D \in \mathbb{R}!}$

Exercice 12. Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}$$

$$\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{A+BX}{X^2+1} + \frac{C}{X} + \frac{D}{X^2}$$ ← Méthode 3 seulement ici.

i) $(X^2)\left(\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}\right) : \frac{X-1}{(X^2+1)}\Big|_{X=0} = \frac{(0)-1}{(0)^2+1} = -1$ $D=-1$

$\frac{C}{X} = \left(\frac{X+1}{X(X^2+1)}\right)\cdot\left(\frac{X}{1}\right) = \frac{X+1}{X^2+1}\Big|_{X=0} = \frac{1}{1}$

maintenant avec méthodes 1 ou 2.

• Pour C : $\boxed{\frac{A+BX}{X^2+1} + \frac{C}{X}} = \frac{X-1}{X^2(X^2-1)} + \frac{1}{X^2} = \frac{X+X^2}{X^2(X^2+1)} = \boxed{\frac{X+1}{X(X^2+1)}} \Rightarrow C=1$

et seulement méthode 2 : il reste 2 inconnus → choisir deux éléments de X pour

$\boxed{\frac{A+BX}{X^2+1}} = \frac{X+1}{X(X^2+1)} - \frac{1}{X} = \frac{X-X^2}{X(X^2+1)} = \boxed{\frac{1-X}{1-X^2}}$

pour : $X=0 \Rightarrow A=1$

$X=1 \Rightarrow \frac{A+B}{2} \Rightarrow B=-A=-1 \quad \therefore B=-1$

résultat : $$\boxed{\frac{X-1}{X^2(X^2+1)} = \frac{1-X}{X^2+1} + \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}}$$