Sol Ex

Pendant le CM 12
Fiche de TD 6, Ex. 21

27/04
Gricey
ANALYSE 2

On rappelle la formule de Taylor-Lagrange. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(1+x)$

1) Mq. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,+\infty[$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1-x)^k} \quad (P_k)$$

init: $k=1$

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{1-1}(1-1)!}{(1+x)!}$$

$\to$ c'est bon

Héréd: Soit $k \in \mathbb{N}^*$ t.q. P_k vraie

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}\right)' = (-1)^{k-1}(k-1)!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right) = (-1)^{k-1}(k-1)!\left(-\frac{k}{(1+x)^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{(-1)^k \times (k-1)! \times k}{(1+x)^{k+1}} = \frac{(-1)^k \times k!}{(1+x)^{k+1}} \longrightarrow \text{on a montré l'héréd.}$$

ce qui conclut la récurrence.

Rappel:

$(u^n)' = n\, u' \cdot u^{n-1}$

$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = (u^{-n})' = -n \cdot u' \cdot u^{-n-1} = \frac{-n \cdot u'}{u^{n+1}}$

Ici, on applique T-L avec $[a,b] = [0,x]$
$\exists c \in]0,x[$ t.q.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$f^{(0)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\, x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}(-1)^n \cdot n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

2) $\ln(1+x) = \frac{(-1)\,x}{1!} = \frac{(-1)^0 x}{1} + \frac{(-1)^1 x^2}{2} + \frac{(-1)^2 x^3}{3(1+c)^3}$ $\quad c \in]0,x[$.

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

$x>0$, $c>0$, $\frac{x^3}{3(1+c)^3} > 0$

$c>0$, $1+c>1$ $\quad \frac{1}{(1+c)} < 1 \Rightarrow \frac{x^3}{3(1+c)^3} < \frac{x^3}{3}$

$$x - \frac{x^2}{2} < \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}} < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$\ln(1{,}003) = \ln(1+0{,}003)$ encadrer!

$$3.10^{-3} - \frac{(3.10^{-3})^2}{2} < \ln(1{,}003) < 3.10^{-3} - \frac{(3.10^{-3})^2}{2} + \frac{(3.10^{-3})^3}{3}$$

$$3.10^{-3} - \frac{9.10^{-6}}{2} < \ln(1{,}003) < 3.10^{-3} - 45.10^{-7} + 9.10^{-9}$$

$(10^{-3})^3 = 10^{-3} \times 10^{-3}$
$= -10^{-3-3-3} = 10^{-9}$
$= 10^{-3\times-3} = 10^{-9}$
$(3.10^{-3})^3 = 3^3.(10^{-3})^3$

$2{,}50 < x < 2{,}51$
$x \simeq 2{,}5$
$2{,}50 < x < 2{,}501$
$x \simeq 2{,}5$

$$30000.10^{-7} - 45.10^{-7} < \ln(1{,}003) < 3000000.10^{-9} - 4500.10^{-9} + 9.10^{-9}$$

$$29955^{-7} < \ln(1{,}003) < 2995509.10^{-9} < 299551.10^{-8}$$

$$\ln(1{,}003) \simeq 29955.10^{-7}$$

$x > 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$$

$$\frac{x}{n} - \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2} < \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n} - \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^3}{3}$$

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} < \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$$

$\times n$

$$x - \frac{x^2}{2n} < n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < x - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2}$$

$$\exp\left(x - \frac{x^2}{2n}\right) < e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} < \exp\left(x - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(x - \frac{x^2}{2n}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} x - \frac{x^2}{2n}\right) = \exp(x)$$

car exp continue

$$\lim \exp\left(x - \frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2}\right) = \exp(x)$$

par le théo. de Gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} = \exp(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$