II.3 La dérivation approfondie

7/02
Sricey
ANALYSE 2

Prop. I : $f : I \to \mathbb{R}$. $f'(a) := \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}\ \exists \iff f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$.

Déf : $g = o_a f \overset{\text{déf}}{\iff} g = f\cdot\varepsilon\ (g(x) = f(x)\cdot\varepsilon(x))$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$

Si $a \in I$ compris, notation plus courte : $o(f) \equiv o_a(f)$

par exple : $g = o_a(x-a) \iff g(x) = \varepsilon(x)\cdot(x-a)$

Preuve :

$\Leftarrow$) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$ avec $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

Soit $x \neq a$ alors $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \dfrac{(f'(a)+\varepsilon(x))\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = \boxed{f'(a) + \varepsilon(x)}$ ✓

$\Rightarrow$) $h(x) := \begin{cases} 0, & x = a \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & \text{si } x \neq a \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a}\left[\underbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} - f'(a)\right] = 0$

Rq : h continue en a. $\left(\lim\limits_{x\to a} h(x) - h(a)\right)$ → définition de la continuité.

$\varepsilon(x) := h(x)$, $\varepsilon(x)\cdot(x-a) \underset{\text{si } x\neq a}{=} f(x) - f(a) - f'(a) \iff f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + o(x-a)$ ✓ □.

Corollaire : f dérivable en $a \Rightarrow f$ cont. en a.

Preuve : f dériv. $\overset{\text{Prop I}}{\Longrightarrow} f(x) = f(a) + (f'(a) + \varepsilon(x))(x-a)$ $\Big|\ \lim\limits_{x\to a}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(a) + \underbrace{\lim\limits_{x\to a}\left[(x-a)(f'(a)+\varepsilon(x))\right]}_{0}$ □.

Rq : $\not\Leftarrow$ **Ex A :** $f(x) = |x| \to f$ continue en 0.

mais $f_g'(0) \equiv (D_g f)(0) = \lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{|x|-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-} \underbrace{\dfrac{-x}{x}}_{-1} = -1$.

et $f_d'(0) \equiv (D_d f)(0) = +1 \to f'(0) \not\exists$

Ex B : $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$, f dérv. sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

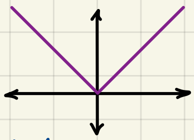
$f_d'(0) = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{2x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x-0}$ ($1 \to f(0)$) $= \lim\limits_{x\to 0_+}(2) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0_-} \underbrace{f'(x)}_{\Rightarrow 2} = 2$

$f_g'(0) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2x+1}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0_-}\left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ mais $f_g'(0) \notin \mathbb{R}$ alors $\boxed{f_g'(0) \not\exists}$

Rq : $\boxed{\lim\limits_{x\to a_{(+)}} f'(x) \neq \underset{f_d'(a)}{f_g'(a)} \text{ en général}}$

Prop II : $\boxed{\begin{array}{l} f_g'(a) \text{ et } f_d'(a) \text{ existent} \overset{\text{ssi}}{\iff} f'(a)\ \exists\ (\text{et } f'(a) = \ell) \\ x \to |x| : f_g'(a) = f_d'(a) =: \ell \in \mathbb{R}. \end{array}}$

Rq : sans $|x|$: **Ex A :** $f_g'(0) = -1$ $\quad f'(0) \not\exists$
$f_d'(0) = +1$
(ici $f_g'(0) = \lim\limits_{x\to 0_-} f'(x)$) mais pas tjs.



Preuve : $\Leftarrow$) évident

$\Rightarrow$) $g(x) := \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \end{cases}$

M.q. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \mathbb{R}$
$\quad\ \,\|$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec } \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = a, \\ \text{on a } \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \ell \end{cases}$ $\quad \boxed{x_n \neq a\ \ \forall n \in \mathbb{N}}$

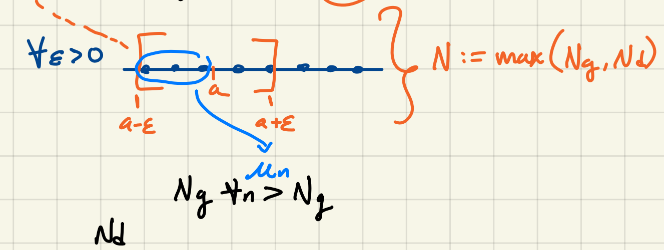
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donné $\longrightarrow$ u_n sous-suite $x_n < a$
v_n sous-suite $x_n > a$

Exple: $\left(a=0, \quad x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \; (n\in\mathbb{N}^*) \quad \begin{matrix} \nearrow u_n = -\frac{1}{2n-1} \\ \searrow v_n = \frac{1}{2n} \end{matrix} \right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) \overset{\text{déf}}{=} f'_g(a) = \ell$

$\lim\limits_{n\to\infty} g(v_n) \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{f'_d(a) = \ell}_{\text{par l'hypothèse}}$ $\longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \ell$ $\square$.

"On a 2 sous-suites $\longrightarrow$ m̂ limite
la suite $x_n \longrightarrow$ m̂ limite"



Déf: $f : I \to \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ continue
$f \in C^0(I)$ ssi f cont. sur I
- $f \in \mathcal{D}^n(I) \equiv \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ ssi f est n fois dérivable $(\exists f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), \forall x\in I)$
- $f \in C^n(I) \equiv C^n(I,\mathbb{R})$ ssi 1) $f\in\mathcal{D}^n(I)$
  2) $f^{(n)} \in C^0(I)$

f est de type C^n

- $f \in C^\infty(I) = \mathcal{D}^\infty(I)$ ssi $f \in C^n(I)$ $\forall n\in\mathbb{N}^{(*)}$ $C^\infty(I)$ des fonctions lisses

Rq: des inclusions évidentes $C^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset C^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset C^2 \supset \dots \supset C^\infty$

Exple: 1) $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x\in\mathbb{R}^* \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$f \notin C^0(\mathbb{R})$ mais $f|_{\mathbb{R}^*} \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$.

2) **Ex A:** $f(x) = |x|$, $f\in C^0$, $f \notin \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$
$\left(f|_{\mathbb{R}^*} \in C^\infty(\mathbb{R}^*) \text{ car } f|_{\mathbb{R}^*_-}(x) = -x \quad f|_{\mathbb{R}^*_+}(x) = +x \right)$

3) $f(x) = x\cdot|x|$, $D_f = \mathbb{R}$. **Lemme:** $f\in C^1(\mathbb{R})$, $f\notin\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$

Preuve: $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cancel{x}|x|-0}{\cancel{x}-0}}_{|x|} = 0$, $\longrightarrow$ $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -2x & \text{si } x<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f'\in C^0$, alors $f\in C^1(\mathbb{R})$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$

$f'(x) = 2|x| \longrightarrow f' = C^0$ mais $f' \notin \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ alors $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ $\square$.

4) **Ex C:** $f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$ **Lemme:** $f\in\mathcal{D}^1$, $f\notin C^1(\mathbb{R})$

Preuve: (Lemme): $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0}}_{= x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0 \Longrightarrow f\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R})$

$x\neq 0$: $f'(x) = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}_{-\frac{1}{x^2}} = \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x\to 0} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \nexists}$

$\left(\frac{1}{x^k}\right)' = (x^{-k})' = -k\cdot x^{-k-1} = -\frac{k}{x^{k+1}} \longrightarrow -\frac{1}{x^2}$

alors $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f'(x) \nexists}$ $\boxed{\text{alors } f'\notin C^1(\mathbb{R})}$ $\square$.

Prop: $f,g\in C^n \Rightarrow f+g,\ f\cdot g,\ f\circ g \in C^n$

Prop III: f dérivable sur $I\setminus\{a\}$.
$\left(\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell\in\mathbb{R} \Leftrightarrow\right) \lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = \ell\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \ell$ ET f continue en $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\right)$.
$\Longrightarrow f\in C^1(\mathbb{R})$.

cf. Ex B.

Rq: $\not\Longrightarrow$ sans $(**)$, cf. Ex. B:

Prop IV: $\lim_{x\to a^-} f'(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell_2$ ⇝ "les limites à gauche $(-)$, à droite $(+)$ existent".
ET $\underset{\mathbb{R}}{\ell_1} \neq \underset{\mathbb{R}}{\ell_2} \Rightarrow f'(a) \nexists$. **Rq:** Ex C montre que $\lim_{x\to a} f'(x) \nexists \not\Rightarrow f'(a) \nexists$.

Preuve: (Prop III)

1) M.q. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \neq 0, \lim_{x_n\to a}(x_n) = a \xrightarrow{\text{2 sous-suites}}$ u_n ... les termes $x_n < a$; v_n ... " " $x_n > a$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a}} = f'_g(a) \left(\neq \lim_{x\to a} f'(x) = \ell \right)$ en générale

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(v_n)-f(a)}{v_n-a} = f'_d(a)$

TAF $\boxed{\frac{f(u_n)-f(a)}{u_n-a} = f'(c_n)}$

où $c_n \in]u_n, a[$

$\lim_{n\to\infty} u_n = a \xRightarrow{\text{gendarmes}} \lim_{n\to\infty} c_n = a$

ici $f'(a) = \lim_{n\to\infty} f'(c_n) = \boxed{\lim_{x\to a} f'(x) = \ell}$:= (Δ)

par l'hypothèse

de la même manière $f'_d(a) = \boxed{\lim_{x\to a_+} f'(x) = \ell}$:= (□)

$\underset{\text{Prop III}}{\Longrightarrow} f'(a) = \ell \Rightarrow f' \in \mathcal{D}^1(I)$

et (Δ) + (□) ⟹ $f' \in C^1(I)$.

Preuve: (Prop IV): utiliser aussi TAF (à vous!).

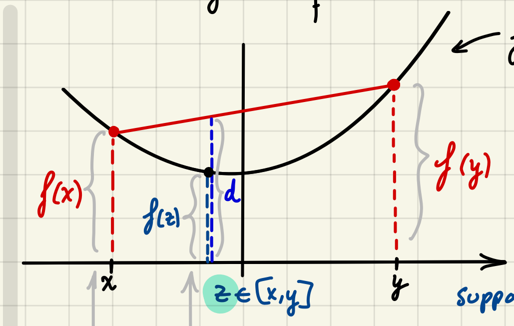
II.4 Des fonctions convexes

Déf: $f: I \to \mathbb{R}$ est convexe (concave) $\iff f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$.

• Strictement convexe (concave) pour les inégalités strictes.

Thrm: $f \in \mathcal{D}^2(I)$: $\boxed{f \text{ convexes} \iff f'' \geq 0 \quad \text{concave } \leq}$ **Preuve:** plus tard.

Motivation géométrique.



supposons $y > x$

Les distances de $f(x)$ et de $f(z)$ jusqu'au graphe f.

$\left. \begin{array}{l} z = x + t(y-x) \\ t \in [0,1] \end{array} \right\}$

Changem^t des variables $t = \lambda$

$f(z) = f(x + t(y-x)) = f((1-t)x + ty)$

$f(\lambda x + (1-\lambda)y)$

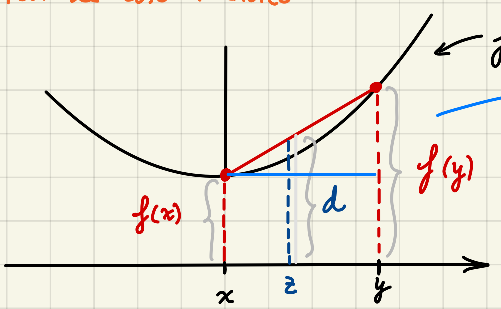
$\lambda := 1-t$, $\Rightarrow \lambda \in [0,1]$

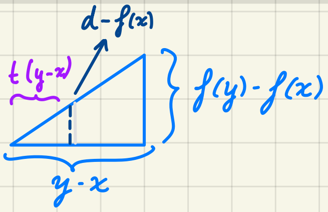
$f(z) = f(x + (1-\lambda)y)$

convexe $\overset{ssi}{\iff} d \geq f(z)$ $(\forall\ x < z < y \in I)$

Le côté à gauche de la condition.

Pour le côté à droite:





$\frac{d - f(x)}{t(y-x)} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow d = f(x) + t\cdot(f(y)-f(x))$
$= (1-t)f(x) + t\cdot f(y)$

Prop: $f \in D^2(I,\mathbb{R})$, $a \in \mathring{I}$,

$\left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ \text{et} \\ f''(a)<0 \ (>) \end{array}\right\} \Longrightarrow$ a un max. locale (min)

Remarques:

1) Rappel: $f'(a)=0 \not\Rightarrow$ a est un point extrême locale.
(exple: $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(0)=0$

2) $\not\Leftarrow$ exple $f(x)=x^4$, $x=0$ min, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$.

II.5 Des suites récurrentes

$\left.\begin{array}{l} f: I\to\mathbb{R} \\ u_0\in I \end{array}\right\}$ données

Déf: suites récurrentes: $\boxed{u_{n+1}=f(u_n)}$ =: ⊛
définie seulement si $u_n\in I$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Exple: $f(x)=\alpha\cdot x$, $I=\mathbb{R}$

$u_{n+1}=\alpha\cdot u_n=\dots=\alpha^{n+1} * u_0$ (par récurrence). Suite Géométrique.

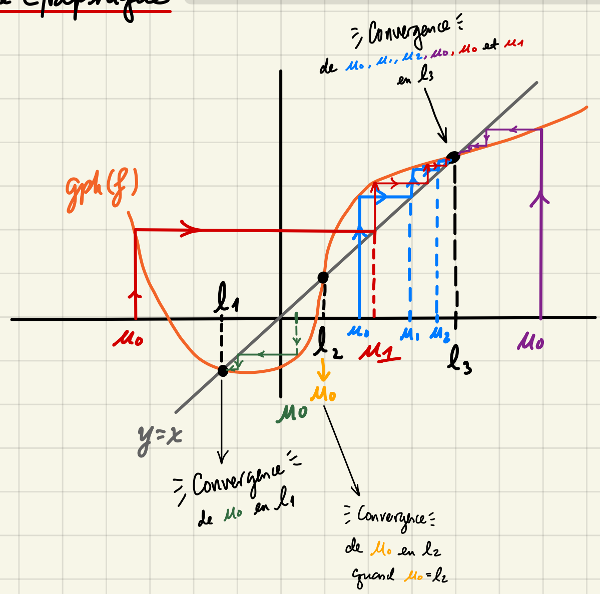
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} u_0 & \text{si } |\alpha|<1 \\ u_0 & \text{si } \alpha=1 \text{ ou si } u_0=0 \\ \text{signe}(u_0) & \text{si } \alpha>1 \text{ où } \lim=+\infty \\ \text{signe}(u_0) & \text{si } u_0>0 \text{ où } \lim=1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \nexists$ si $\alpha\le -1$

beaucoup plus riche (compliqué) si f n'est pas linéaire.

Lemme: s'il $\exists\ \ell\in I$, $\overbrace{\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\ell}^{(**)}$ et si $\overbrace{f \text{ est continue en } \ell}^{(***)}$, alors $f(\ell)=\ell$.

Preuve: $\ell \overset{(**)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) \overset{(***)}{=} f(\lim\limits_{n\to\infty} u_n) = f(\ell)$ □.

Méthode Graphique:



Si $u_0 \in]\ell_2,\ell_3[\cup]\ell_2,\ell_3]$
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell_3$

si $u_0 \in [\ell_1,\ell_2[$, $\lim=\ell_1$

si $u_0=\ell_2$, $\lim=\ell_2$