
Contrôle continu 1 du 7 février 2023
Durée 45 minutes
Les documents, les téléphones/ calculatrices/ ordinateurs/ objets connectés sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Questions de cours :
1. Donner la définition d'une matrice inversible.
2. Montrer l'unicité de l'inverse.

Correction Questions de cours
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
1. B est l'inverse de A si $AB = I_n = BA$.
2. On suppose que A admet deux inverses B_1 et B_2, on donc

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} AB_1 = I_n = B_1 A \\ AB_2 = I_n = B_2 A \end{cases}$$

On a $B_2(AB_1) = B_2 I_n = B_2$ et $(B_2A)B_1 = I_n B_1 = B_1$
Comme la multiplication des matrices est associative $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1$, on en déduit que $B_1 = B_2$.

Exercice 1.

Déterminer l'ensemble des solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 7z = 11 \end{cases}$$

Correction exercice 1

$$(S) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 7z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 2 \\ y + 5z = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 2 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - z \\ y = -2z + 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \\ z = 3 \end{cases}$$

Il y a une unique solution $(5, -4, 3)$.

Exercice 2.

En utilisant l'algorithme de Gauss, étudier si la matrice suivante est inversible

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculer sa matrice inverse si elle existe.

Correction exercice 2

Première méthode

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$AX = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 3x - y - z = x' \\ -x + y = y' \\ -x + z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix}\begin{cases} 3x - y - z = x' \\ 2y - z = 3y' + x' \\ -y + z = z' - y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 2L_3 + L_2 \end{matrix}\begin{cases} 3x - y - z = x' \\ 2y - z = 3y' + x' \\ z = 2(z' - y') + 3y' + x' = x' + y' + 2z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x' + y + z \\ 2y = 3y' + x' + z = 3y' + x' + x' + y' + 2z' \\ z = x' + y' + 2z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x' + y + z \\ 2y = 2x' + 4y' + 2z' \\ z = x' + y' + 2z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x' + x' + 2y' + z' + x' + y' + 2z' = 3x' + 3y' + 3z' \\ y = x' + 2y' + z' \\ z = x' + y' + 2z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = x' + 2y' + z' \\ z = x' + y' + 2z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Seconde méthode

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 2L_3 + L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Les trois pivots de la matrice triangulaire de gauche sont non nuls donc l'inverse existe.

$$\begin{matrix} L_1 \\ \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} L_1 + L_2 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 en déduire que pour tout $n \geq 1$, $A^n = A$.
2. Calculer B^2 en déduire que pour tout $n \geq 1$, $B^n = 3^{n-1}B$.
3. Calculer AB et BA.
4. Calculer $M = A + B$.
   Pour tout $n \geq 1$, calculer M^n en fonction de n (on explicitera les quatre coefficients de la matrice).

Correction exercice 3

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Par récurrence : soit (H_n) : $A^n = A$.
L'initialisation est vraie pour $n = 1$ (et même pour $n = 2$)
Hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A^{n+1} = A^n A = AA = A^2 = A.$$

On en déduit que l'implication $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Ce qui achève par récurrence donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = A$.

2.
$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 18 & -9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = 3B.$$
Par récurrence soit (H_n) : $B^n = 3^{n-1}B$.
L'initialisation est vraie pour $n = 1$ (et même pour $n = 2$)
Hérédité $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$B^{n+1} = B^n B = 3^{n-1}BB = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1} \times 3B = 3^n B.$$
On en déduit que l'implication $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Ce qui achève par récurrence donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = 3^{n-1}B$

3.
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Il suffit d'additionner les coefficients $M = A + B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Les matrices A et B commutent puisque $AB = BA$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton
$$\forall n \geq 1, M^n = (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = A^n + B^n.$$
Car pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $A^k B^{n-k} = ABA^{k-1}B^{n-1-k} = O$, la matrice nulle.
D'après les questions précédentes, pour tout $n \geq 1$
$$M^n = A + 3^{n-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 3^{n-1}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3 \times 2 & -3 \\ 3 \times 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times 3^n & 1 - 3^n \\ -2 + 2 \times 3^n & 2 - 3^n \end{pmatrix}.$$