

---

Contrôle continu 1 du 7 février 2023

Durée 45 minutes

Les documents, les téléphones/ calculatrices/ ordinateurs/ objets connectés sont interdits.  
Toutes les réponses doivent être justifiées.

---

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une matrice inversible.
2. Montrer l'unicité de l'inverse.

Exercice 1.

Déterminer l'ensemble des solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 7z = 11 \end{cases}$$

Exercice 2.

En utilisant l'algorithme de Gauss, étudier si la matrice suivante est inversible

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculer sa matrice inverse si elle existe.

Exercice 3.

Soient  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2$  en déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $A^n = A$ .
2. Calculer  $B^2$  en déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $B^n = 3^{n-1}B$ .
3. Calculer  $AB$  et  $BA$ .
4. Calculer  $M = A + B$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , calculer  $M^n$  en fonction de  $n$  (on explicitera les quatre coefficients de la matrice).