

Sol Ex

Pendant le CM 6
Fiche de TD 2, Ex. 9

9/03
elfricey
ALGÈBRE 2

a)

$$E = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), f'(x) + 4f(x) = 0 \} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $0 \in E$
- soit $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ Axiomes

1° étape : $0 \in E$

$$f = 0$$

$$f''(x) = 0 \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \in E \quad \checkmark$$

2° étape : prendre 2 fonct et voir si est dedans.

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$$

$$(f' + \lambda g')' = f'' + \lambda g''$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$(f + \lambda g)''(x) + 4(f + \lambda g)(x) = f''(x) + \lambda g''(x) + 4f(x) + 4\lambda g(x)$$

$$= \underbrace{f''(x) + 4f(x)}_0 + \underbrace{\lambda(g''(x) + 4g(x))}_0$$

$$= 0 \quad \Rightarrow f + \lambda g \in E$$

* On est stable par combinaison linéaire.

b) Pr avoir une base, il faut être ds dim 2 (2 éléments vecteurs)

$$(\cos(\alpha x))'' + 4 \cos(\alpha x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2 \cos(\alpha x) + 4 \cos(\alpha x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\alpha^2 + 4) \cos(\alpha x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \text{laquelle marche?}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \quad \text{ou} \quad \alpha = -2$$

$$x \mapsto \cos(2x)$$

$$(x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x))$$

famille libre maximale $\Rightarrow$ c'est une base.

pour libre:

$$\lambda_1 \sin(\alpha x) + \lambda_2 \cos(\alpha x) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\text{fait } (\sin(\alpha x))'' + 4 \sin(\alpha x) = 0$$

$$-\alpha^2 \sin(\alpha x) + 4 \sin(\alpha x) = 0$$

$$(-\alpha^2 + 4) \sin(\alpha x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \quad \text{ou} \quad \alpha = -2$$

$$x \mapsto \sin(2x)$$

Test pour certains "x"

$$x=0 \quad \lambda_1 \sin(2 \times 0) + \lambda_2 \cos(2 \times 0) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \lambda_1 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + \lambda_2 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Explication/Idee

$$\mathbb{R}^2 \quad (1,0) \quad (0,1)$$

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

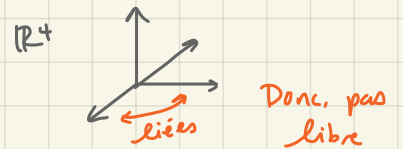
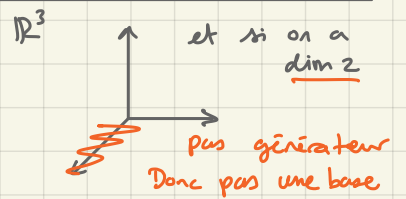
$\Rightarrow$ la famille est libre et de dim 2 $\Rightarrow$ base

$$(1,0) \quad (-1,0)$$

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(-1,0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \quad (\text{un en fonct de l'autre!})$$

$\Rightarrow$ pas libre, donc pas une base



libre nb vect. $\leq$ dim E

général. nb vect. $\geq$ dim E

! libre maximale $\Leftrightarrow$ génératrice minimale $\Leftrightarrow$ base

Exos supplémentaires:

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pas libre}$$

ce vect. est en fonct° des autres 2.

$\dim = 4 > \dim \mathbb{R}^3 (=3) \Rightarrow$ pas libre.

preuve

mais elle peut être génératrice. Elle peut pas être une base.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$$

on peut pas la générer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Génératrice : n'importe quel vect. est généré par l'espace.

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 0 = \alpha + \gamma + \varepsilon \\ 0 = \alpha + \beta - \gamma \end{cases} \Rightarrow \underline{0=1} \text{ absurde! } \downarrow$$

$\rightarrow$ pas génératrice

$\rightarrow$ pas une base : $\dim \neq 3$, pas libre, pas génératrice.

Dans $\mathbb{R}^4$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{pas génératrice } \dim 3 < 4$$

$\rightarrow$ pas une base

Libre?

le zéro de l'espace

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ -\lambda_3 - \lambda_3 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ -3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{famille libre}$$

exple : pas génératrice:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z-y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$