SolEx TD 1 - $\boxed{\text{ex.25}}$ et ex.23

9/02
Gricey
ALGÈBRE 2

Exercice 25.
Soient $A = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de P, en déduire que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

(b) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $\det A = 1\times 3 - (-1)\times(-2) = 3-2 = 1 \neq 0$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. $D = P^{-1}AP$

$$= \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

3. $D^n = \begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$

pour n=0
c'est tjs
la matrice
$\mathbb{1}$!

par récurrence:

- Init: $n=0$ $\quad \begin{pmatrix}1^0 & 0\\ 0 & 2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- Héréd: Supposons $D^n = \begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1^{n+1} & 0\\ 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$$

4. - Init: - $n=0$ $\quad P\underbrace{D^0}_{=I}P^{-1} = PP^{-1} = \underbrace{I}_{=A^0}$

- $n=1$: $PDP^{-1} = \underbrace{P(P^{-1}}_{=I}A\underbrace{P)P^{-1}}_{=I} = A$

- Héréd: $n \in \mathbb{N}$ supposons $A^n = PD^nP^{-1}$

On veut m.q. $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$$
$$= PD^{n+1}P^{-1}$$

5. a) $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_n - 2b_n\\ 3a_n + 4b_n\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$$
$$= A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

b) $A^n = PD^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix}3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n-1}\\ -3 + 3\times 2^n & -2 + 3\times 2^n\end{pmatrix}$$

$a_0 = b_0 = 1$

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1}\\ -3 + 3\times 2^n & -2 + 3\times 2^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 - 2^{n+1} + 2 - 2^{n+1}\\ -3 + 3\times 2^n - 2 + 3\times 2^n\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 - 2^{n+2}\\ -5 + 3\times 2^{n+1}\end{pmatrix}}$$

Exercice 23 (CC1 2021). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Montrer par récurrence sur n : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que $A^2 - 3A + 2\mathbb{1}_2 = 0$.
4. Utiliser cette formule pour montrer que A et inversible, exprimer A^{-1} en fonction de A et de $\mathbb{1}_2$.

clé : utiliser la quest. précéd. ✓

• pas det ! ✗

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1

$n=1$, $A^n = A$

- $n=2$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $n=3$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
- $n=4$, $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

2 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

- Init :
  - $n=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2^1 - 1 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $= A$
- Héréd. : $n \in \mathbb{N}$ supposons $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 + 2(2^n - 1) \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix}}_{*}$$

3 $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 $A \cdot A^{-1} = I_2$

$A^2 - 3A + 2 + 2I_2 = 0$

$A(A - 3I_2) = -2I_2$

$-\frac{1}{2} A(A - 3I_2) = I_2$

$A \times \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)(A - 3I_2)}_{A^{-1}} = I_2$

→ A inversible

$A^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)(A - 3I_2)$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$