Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE : Algèbre 2

Examen de session 2 - 21 juin 2023, 14h

Durée 1H30

Avertissement : *Une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction. Sauf mention contraire, toute réponse doit être justifiée. Tous les appareils électroniques sont interdits. Le barème est donné à titre* **indicatif**.

Exercice 1. (8 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (4 pts) Déterminer si A est inversible et si oui déterminer A^{-1}.
2. (1 pt) Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A. *Pour les étudiants de l'amphi d'info : c'est-à-dire que u est l'endomorphisme de $\boldsymbol{R}_2[X]$ tel que $A \equiv [u]_{\mathcal{B}}$.*
   (a) (1.5 pts) Exprimer les polynômes $u(1)$, $u(X-1)$ et $u((X-1)^2)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) (1.5 pts) Exprimer le polynôme $u(X)$ dans la base canonique $(X^2, X, 1)$ de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 2. (6 pts) Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on définit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x-y-z = 0 \text{ et } x+z = 0\}$ et $G = \text{vect}\left((1,0,1),(0,1,-1)\right)$.

1. (0.5 pts) Déterminer une base de G. En déduire la dimension de G.
2. (1.5 pt) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
3. (1.5 pt) Déterminer une base de F. En déduire la dimension de F.
4. (1.5 pts) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
5. (1 pt) Déterminer une équation caractérisant G.

Exercice 3. (6pts)

Soit $u : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$ par :

$$u(x,y,z,t) = (x+y+z+2t, 2x+3y+2z+3t, y+z-t).$$

1. (1 pt) Montrer que u est une application linéaire.
2. (1 pt) Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{R})$ représentative de u dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$.
3. (1 pt) Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. (0.5 pts) u est-elle injective ?
5. (1 pt) Déterminer le rang de u.
6. (0.5 pts) u est-elle surjective ?
7. (1 pt) Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.