Des applications linéaires de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Première version) :

23/02

Aricay

ALGÈBRE 2

$\boxed{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}$ $\quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \cong \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$A \cdot x \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$ $\quad \boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto A \cdot x}$

définissons une application f avec A des ptés de f (venant de la multiplication matricielle) :

$f(x+y) \overset{\text{Déf}}{=} A(x \cdot y) = \underbrace{A \cdot x}_{f(x)} + \underbrace{A \cdot y}_{f(y)} \implies \boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)}$ f est additive

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda x) \overset{\text{Déf}}{=} A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot \underbrace{(A \cdot x)}_{f(x)} = \lambda \cdot f(x) \implies \boxed{f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)}$

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)}$ (*)

On appelle chaque applicat° $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec * une application linéaire.

Exple : 1) $m = n = 1$ $\quad A = (a)$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a \cdot x$ $\quad \implies$ applicat° linéaire ✓

$x \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 3 \implies$ pas une applicat° linéaire. ✗

$f(\underbrace{x+y}_{z}) = 2(x+y) + 3$

$\neq$ ← jamais égal !

$f(x) + f(y) = 2x + \underline{\underline{3}} + 2y + \underline{\underline{3}}$ $\quad$ (3 + 3 = 6)

II. DES ESPACES VECTORIELS

II.1 Les Axiomes

II.1.1 Des groupes

Déf : $(G, *)$ est appelé groupe si : $\begin{cases} 1) \ G \text{ est ensemble} \\ 2) \ * \text{ est une composition interne, càd :} \end{cases}$

$\implies$ c'est une application "$*$" · $G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 * g_2$ ← lire "fois"

(ou $m : G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto m(g_1, g_2) =: g_1 * g_2$) ← Notation

t.q. a) $*$ est associatif $\quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G : g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$

b) $\exists$ un élément neutre $\quad n \in G \quad$ càd $\quad \forall g \in G : g \cdot n = g = n \cdot g$

c) chaque élément $g \in G$ a un élément inverse denoté $g^{-1} \in G$.

càd, $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ t.q. $g \cdot g^{-1} = n = g^{-1} \cdot g$

Déf: $(G,*)$ est un groupe abélien (ou commutatif) si, $(G,*)$ est un groupe et $\forall g_1, g_2 \in G : g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

Exples: 1) $(\mathcal{M}_{n.n}(\mathbb{R}), \cdot)$

opération interne bien définie

a) ✓
b) ✓ $n = \mathbb{1} \equiv I$
c) NON (en générale) p.e. $\mathbb{O}$ n'as pas d'inverse.

2) $GL(n, \mathbb{R}) := \{= A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

$\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$

Rq: $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0 \Rightarrow \det(A \cdot B) \overset{\text{en}}{\underset{\text{générale}}{=}} \det A \cdot \det B \neq 0$ ✓

G: général linéaire

2') $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe abélien $\overset{\text{ssi}}{\Longleftrightarrow}$ $n = 1$

Spécial

3) $SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = +1\}$

On l'appelle: sous-groupe

Rq: $SL(n, \mathbb{R}) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ est un sous ensemble qui est aussi un groupe (avec les opérations induites)

1) $\det(A^{-1}) \underset{\text{gén.}}{\overset{\text{en}}{=}} \frac{1}{\det A} = 1$ si $\det A = 1$

spécial orthogonal

3') $SO(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{matrix} \theta \in \mathbb{R} \\ \text{ou } \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \right\}$ est un groupe abélien

les rotations dans $\mathbb{R}^2$

Spécial: pas de rotat° et det +1

Rq: les rotations ds $\mathbb{R}^3$ forment un groupe non-abélien.

II.1.2 Des corps:

- $(\mathbb{N}^*, +)$ associatif, $n \not\exists$
  - ajoutons un élément neutre n que l'on denote en tant que 0.
- $(\mathbb{N}, +)$ a), b) ✓ ~~c~~
  - Pour obtenir un groupe, → On ajoute des éléments réciproques $(-m)$, pour chaque élément (sauf pour $n=0$, car n est neutre $\Rightarrow n \cdot n = n$, et alors $n^{-1} = n$).

  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ "$-m = m^{-1}$"
- $(\mathbb{Z}, +)$ groupe abélien
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ multiplication a) ✓, b) ✓, ~~c~~
  - On ajoute des éléments réciproque pour tous $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 0\}$ denoté "k^{-1}" $:= \frac{1}{k}$ et on ajoute aussi des éléments t.q. p. $\frac{1}{q}$ à l'intérieur de l'ensemble

  ⇝ $(\mathbb{Q}, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un exple d'un corps

Déf: un corps est un ensemble C avec deux compositions (lois) internes $+$ et $\cdot$ t.q.

1) $(C, +)$ est un groupe abélien (élément neutre "0")
2) $(C \setminus \{0\}, \cdot)$ ——— " ——— (——— " ——— "1")
3) (compatibilité entre "+" et "·"): $\forall a, b, c \in C : (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

la distributivité

Exples:

- $(\mathbb{Q},+,\cdot) \subset (\mathbb{R},+,\cdot) \subset (\mathbb{C},+,\cdot)$

t.q. toutes séquences de Cauchy convergent

t.q. des équations algébriques (comme $x^2+1=0$) ont des solutions

Notation plus habituelle : $C =: \mathbb{K}$

- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\cdot)$

p nombre premier

p.ex. $p=2$ $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{pairs}}}{\mathbb{Z}}/2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{impaires}}}{\mathbb{Z}} \cong \{(0,1)\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Pour nous (ds ce cours) :

$\mathbb{K} \in \{\underline{\underline{\mathbb{R}}}, \underline{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}\}$

!! !

II.1.3 Axiomes des espaces vectoriels:

Déf: Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est un corps, est un ensemble E avec une loi interne "+" : $E\times E \to E$, $(v,w)\mapsto v+w$
et une loi externe "$\cdot$": $\mathbb{K}\times E \to E$, $(\lambda,v)\mapsto \lambda\cdot v$ t.q.

$\Longrightarrow$ vecteur

1) $(E,+)$ groupe abélien (el neutre 0_E)
2) compatibilités
$\lambda\cdot(v+w) = \lambda v + \lambda\cdot w$
$(\lambda_1+\lambda_2)\cdot v = \lambda_1\cdot v + \lambda_2\cdot v$
$(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot v = \lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot v)$
$1\cdot v = v$

distributivité
$\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$
$\forall v,w \in E$

Notation / Nomenclature:

- si le choix de $\mathbb{K}$ est "claire" (pour nous, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) on dit simplem^t $E \sim (E,+,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel tout simplem^t.

- $\mathbb{R}$-esp.vect = esp. vect. sur $\mathbb{R}$ (réel)
- $\mathbb{C}$-esp. vect = —— " —— $\mathbb{C}$ (complexe)
- "v^{-1}" $:= -v$
- les elements de $\underset{\mathbb{K}}{E}$ st appelés des vecteurs scalaires.

Exples:

1) $\mathbb{R}^n$ est un ($\mathbb{R}$-) esp. vect. (ou un $\mathbb{Q}$-esp.vect. aussi).
2) $\mathbb{C}^n$ est $\mathbb{C}$-esp. vect. mais aussi un $\mathbb{R}$-esp. vect. ds ce deuxième cas on a $\underset{\substack{\Psi\\ a+ib}}{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^1 \cong \underset{\substack{\Psi\\ \binom{a}{b}}}{\mathbb{R}^2}$

Rq: Axiomes $\Longrightarrow$ $0_{\mathbb{K}}\cdot v = 0\cdot v = 0_E \underset{\text{notation}}{=} 0$
$\Longrightarrow$ $(-1)\cdot v = -v$

à partir des $\mathbb{R}$-esp vectoriels (sauf notice contraire).
maintenant

3) $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \ni A,B$, $A+B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $\lambda\in\mathbb{R}$

4) Soit A un ensemble quelconque, $E := \mathbb{R}^A = \{f: A\to\mathbb{R}\}$
(les applicat° de A vers $\mathbb{R}$)

$f,g \in E$ $(f+g)(a) := f(a)+g(a)$ $\forall a\in A$ $\longrightarrow$ définie l'addition ds E.
$\lambda\in\mathbb{R}, f\in E$ $(\lambda\cdot f)(a) = \lambda\cdot f(a)$ $\forall a\in A$.

Des sous-ensembles intéressants:

4.1) $A = \{1, 2, \dots, n\}$

$E = \{f : A \to \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

4.2) $A = \mathbb{N}$

$E = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\} \cong \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ u_n \in \mathbb{R}\}$ des suites

4.3) $A = \mathbb{R}$, $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \equiv \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Des exples des espaces vectoriels

$\mathcal{F}(\mathbb{R}) \supset \underbrace{C^0(\mathbb{R})}_{\text{fonct° continues}} \supset C^1(\mathbb{R}) \supset C^2(\mathbb{R}) \supset \dots \supset C^\infty(\mathbb{R})$

$C^\infty(\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}[X] \supset \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$ des polynômes

ils sont tous des espaces vectoriels.

→ car si on soustrait deux polynômes de degré n avec le même coefficient dominant, le polynôme résultat a un degré inférieur.

II.2 Des sous espaces vectoriels

II.2.1 Déf: E esp. vect., F est un sous-esp. vectoriel si

1) $F \subseteq$ sous-ensemble (non-vide) de E, $F \neq \emptyset$

2) $\left.\begin{matrix} \forall u, w \in F & v + w \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & \lambda v \in F \end{matrix}\right\} \iff v + \lambda w \in F$

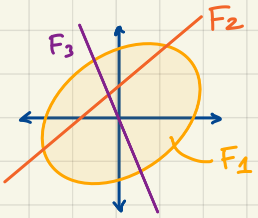
3) avec $\underset{\text{interne}}{+}$ et $\underset{\text{externe}}{\cdot}$ les restrictions des lois dans E.

Rq: $0) \xleftrightarrow[\text{en utilisant } (2) \Rightarrow 0\cdot v = 0_E]{} 0')$ $0_E \in F$

Lemme: Tout ss-esp. vect. $F \subseteq E$ est un espace vectoriel.

II 2.2 Exples:

1) $E = \mathbb{R}^2$



- passe par $x = 0$
- et 2 fois ou 3 fois être dedans

⇝ seulement F_3 un s.e.v.

Notation: s.e.v. sous-espace vectoriel.

2) $F := \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ s.e.v.

car : • $\forall x, y \in F \implies \left.\begin{matrix} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0 \end{matrix}\right\} +$

$3(x_1+y_1) - 5(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) = 0$

$\implies \underbrace{x + y}_{\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}} \in F$

• Si $x \in F$, alors $\lambda x \in F$.

Rq: ⚠ Toutes les s.e.v de $\mathbb{R}^2$ sont (l'origine): 0, $\mathbb{R}^2$, et des droites qui passent par l'origine.

Autrement:

$F = \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 9 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ~~s.e.v.~~

car : $\forall x, y \in F \implies \left.\begin{matrix} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 9 \end{matrix}\right\} +$

$3(x_1+y_1) - 5(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) = 18$

car : $x + y$ ne satisfont l'eq. qui définit F