Algèbre 2 - CC1, Sujet 1

Alyce

4 mars 2023

Table des matières

Chapitre 1

Question de cours

1.1 Énoncé

Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A\vec{(x)} = \vec{(b)}$ ait des solutions $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

1.2 Réponse

Pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ ait des solutions si et seulement si $rg(A|\vec{b}) = rg(A)$.

Càd la matrice étendue $(A|\vec{b})$, une fois triangularisée, n'admet aucune ligne de la forme : $0\ 0\ 0 \ldots 0|c$ avec $c \in \mathbb{R}^*$.

Chapitre 2

Exercice 1

2.1 Énoncé

Soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ et $\vec{(}b) \in \mathbb{R}^3$ tq :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le déterminant de A

b. Déterminer l'inverse de la matrice A

c. Trouver la solution unique $A\vec{x} = \vec{b}$

2.2 Réponse

2.2.1 Question a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 4 - 6 - 2(3-6) + 6 - 8 \\
&= -2 + 6 - 2 \\
\det(A) &= 2
\end{aligned}$$

2.2.2 Question b

Nous allons utiliser la méthode de la comatrice.

$$com(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^{T}com(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}{}^{T}com(A) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2.3 Question c

A inversible et $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$

Donc : $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

D'où :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Exercice 2

3.1 Énoncé

Soit P un plan tq $P = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - z = -2\}$. Déterminez une équation paramétrique du plan P.

3.2 Réponse

On va d'abord exprimer une des coordonnées en fonctions des autres, par exemple, z.

On a : $z = 2x + y + 2$

On pose $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, d'où : $z = 2\lambda + \mu + 2$

On pose $p \in P$, d'où : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$