Université Claude-Bernard Lyon 1

ALGÈBRE 2 INFO, printemps 2023

Fiche TD n°3,

Applications Linéaires

$\boxed{\textbf{Exercice}}$: Fait pendant l'ES
Exercice : Fait pendant le TD
Exercice : Partie soulignée faite pendant le TD
Exercice : A faire à la maison.
Exercice* : Des exercices plus compliqués ou abstraits (pour ceux qui sont intéressés, mais pas nécessaires pour la réussite dans cette UE).

Des applications linéaires (et non-linéares), noyau et image

Exercice 1. Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

a) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$

b) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,x+1) \end{array}$

c) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,a) \end{array}$

d) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax,ay) \end{array}$

e) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+a,y+a) \end{array}$

f) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y+z) \end{array}$

g) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x,0,x-y) \end{array}$

h) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit $f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto z + a\bar{z}$. Suivant les valeurs de a, dire si f est $\mathbb{C}$-linéaire ou $\mathbb{R}$-linéaire (c.à.d. une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{C}$ ou une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le corps $\mathbb{R}$).

Exercice 3. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par $f(x,y) = (x,0)$ et $g(x,y) = (0,y)$. Déterminer $f+g$, $f \circ g$, $f^2 := f \circ f$ et g^2.

Exercice 4. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x-y)$.

1. Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2. A-t-on $\mathbb{R}^2 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$?

Exercice 5. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires et déterminer leur noyau et image.

1. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(2) \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & P \circ P \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) \end{array}$

Exercice 6. On considère $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1\,, \quad f(e_2) = -e_1\,, \quad f(e_3) = e_3\,.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$?
4. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 7. On considère $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2\,, \quad f(e_2) = e_2\,, \quad f(e_3) = -e_3\,.$$

1. Déterminer l'image de f.
2. Quel est le rang de f ? Quelle est, en conséquence, la dimension du noyau de f ?
3. Deviner un vecteur dans le noyau de f. En déduire l'ensemble de $\ker f$.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$?
5. Montrer que $f^2 = f$ (en établissant l'égalité sur les éléments de $\mathcal{E}$).

Exercice 8. On note $\Psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par $\Psi(P) = P(X+1) - P(X)$. (Dans cet exercice il est admis qu'un polynôme qui prend la même valeur sur une infinité de points doit être constant.)

1. Montrer que Ψ est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. En déduire le rang de Ψ.
4. Donner une description simple de l'image de Ψ.
5. Calculer $\operatorname{Im}(\Psi) + \ker(\Psi)$. Est-ce une somme directe ?

Exercice 9. Soit $f\colon \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n, A \mapsto A + A^T$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une description simple du noyau et de l'image de f. (De quel ensemble de matrices s'agit-il dans chacun des deux cas ?)
3. Calculer $\operatorname{Im}(f) + \ker(f)$. Est-ce une somme directe ? A-t-on $f^2 = f$?

Exercice 10. Soit $f\colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2, A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^T)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base du noyau et de l'image de f.
3. Calculer $\operatorname{Im}(f) + \ker(f)$. Est-ce une somme directe ? A-t-on $f^2 = f$?

Exercice 11. Soit $f\colon \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3, A \mapsto A + 2A^T$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. En conclure sur le rang de f.
4. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Exercice 12. On considère les applications $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A^T \cdot x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le noyau de f en trouvant une base pour celui-ci.
2. Quel est le rang de f ?
3. Trouver une base pour son image, $\operatorname{Im} f$.
4. Trouver une base pour l'image de g en appliquant des opérations élémentaires de colonnes à la matrice A^T.
   Indication : Comparer avec le point 1.

5. Trouver une base de Im g de manière plus rapide en utilisant le point 2 (et le fait que $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A^T$).
6. Déterminez le noyau de g en trouvant une base pour celui-ci.
7. Est-ce que l'on a Im $f = \ker g$ et $\ker f =$ Im g ?

Exercice 13. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f.
2. Déterminer Im f. (La décrire de la manière la plus simple possible).
3. Quelles colonnes de la matrice peuvent être supprimées pour fournir une base possible de Im f ?

Exercice 14. On considère les applications $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto A \cdot x$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A^T \cdot x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le noyau de f en trouvant une base pour celui-ci.
2. Quel est le rang de f ?
3. Trouver une base pour son image, Im f.
4. Trouver une base pour l'image de g en appliquant des opérations élémentaires de colonnes à la matrice A^T.
5. Trouver une base de Im g de manière plus rapide en utilisant le point 2.
6. Déterminez le noyau de g en trouvant une base pour celui-ci.
7. Est-ce que l'on a Im $f = \ker g$ et $\ker f =$ Im g ?

Exercice 15. Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto A \cdot x$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base pour l'image et le noyau de f.

Exercice 16. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subseteq \ker(f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.

Exercice* 17. Soit $f\colon E \to E$ une application linéaire telle que $f^2 = -f$.
Montrer que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice* 18. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(b_1, \ldots, b_n)$ et soit $f\colon E \to F$ une application linéaire telle que $f(b_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$.

1. Montrer que f est injective ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ forme une famille libre.
2. Montrer que f est surjective ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ forme une famille génératrice de F.
3. En déduire que f est un isomorphisme ssi $(v_1, \ldots, v_n)$ forme une base de F.

Exercice 19. Soit k un corps. On note $E^* = \mathcal{L}(E, k)$ le dual du k-espace vectoriel E.

1. Montrer que E^* est un espace vectoriel.
2. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Justifier qu'il existe une unique famille de vecteurs, $e_i^* \in E^*$ telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}, \forall (i,j) \in I^2$. On appellera cette ensemble de formes linéaires famille duale.
3. Montrez que la famille duale d'une base est toujours libre.
4. En déduire qu'en dimension finie, la famille duale est une base et que $\dim(E) = \dim(E^*)$.
5. Exemples :
   (a) Quelle est la base duale de $\{(1,1),(1,0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$?
   (b) Quelle est la famille duale de $\{X^k\}_{k \in [0,n]}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$? (Remarque : le dual de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas du tout isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.)
6. On note $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E. Soit E de dimension finie. Montrez que : $\begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & ev_x \end{array}$ est un isomorphisme.
7. Montrer qu'en dimension finie toute base du dual admet une base dont c'est le dual.

Représentations matricielles des applications linéaires

Exercice 20. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+3y, -x+y)$.
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (y, -x+y, 2x-y)$.
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x+4y+z, -x+y+z)$.

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$.
Donner une expression explicite de $f_A(x,y)$, $f_A(f_A(x,y))$ et $f_{A^2}(x,y)$ où $f_{A^2}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A^2 \cdot x$. Que remarque-t-on ?

Exercice 22. Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants. On note $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. $f_1\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f_1(P) = P'$.
2. $f_2\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_2(P)(X) = XP'(X)$.
3. $f_3\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f_3(P)(X) = P(X+1)$.
4. $f_4\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2$ définie par $f_4(P) = (P(-1), P(1))$

Exercice 23. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de R^3.
Soit f l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_3$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$.

1. Écrire la matrice associée à l'application f.
2. Déterminer $\ker(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique (c'est un plan, une droite, ...).
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
4. Calculer l'image de $x = (-3, 6, 3)$ par f et commenter.
5. Calculer l'image de $y = (1, 1, 1)$ par f et commenter.

Exercice 24. Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de R^3.
Soit f l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 6e_1 + 2e_2 + 4e_3$ et $f(e_3) = -9e_1 - 3e_2 - 6e_3$.

1. Écrire la matrice associée à l'application f.
2. Déterminer $\ker(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et commenter le résultat de façon géométrique.
4. Calculer l'image de $x = (0, 3, 2)$ par f et commenter.
5. Calculer l'image de $y = (3, 1, 2)$ par f et commenter.

Exercice 25. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $u^T \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tel que $u^T(\lambda)(x) := \lambda(u(x)), \forall(\lambda, x) \in F^* \times E$.

1. Montrez que :
   (a) $\{\xi \in E^* | \xi(x) = 0, \forall x \in \ker(u)\} = \mathrm{Im}(u^T)$,
   (b) si E est de dimension finie, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^T)$.
2. En déduire que u est injective si et seulement si u^T est surjective.
3. Quelle est la relation entre la transposée de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ et la matrice de ${}^t u$ dans $\mathcal{E}^*$, $\mathcal{B}^*$?.

Des projections et des rotations

Exercice 26. Trouver les matrices M_i, $i = 1, \ldots, 6$, des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels correspondants.

1. $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation avec centre $(0, 0)$ par l'angle $\pi/4$.
2. $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $x + y = 0$. (une réflexion est une symétrie par rapport à un hyperplan parallèlement à sa droite orthogonale)
3. $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la symétrie par rapport à l'origine.
4. $f_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan $z = 0$.
5. $f_5\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la réflexion par rapport au plan $x + y = 0$.
6. $f_6\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la réflexion par rapport à l'origine.
7. Vérifier que dans tous les cas on a bien $(M_i)^T = (M_i)^{-1}$. Calculer $\det(M_i)$ et commenter.
8. $f_7\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à la droite $x + y = 0$ et parallèment à $y = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **27.** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $F := \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^2$ et $G := \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix})$.

1. Pour quelles valeurs de α, G est supplémentaire à F ?
2. Soit $\alpha = 2$. Déterminer la matrice M qui entraîne la projection $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto M \cdot x$ sur F parallèlement à G.
3. Vérifier le résultat en calculant p de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vérifier aussi que $M^2 = M$.
4. Pour quelle valeur de α les droites F et G sont-elles orthogonales entre elles ? Déterminer la matrice M dans ce cas.
   Remarque : Il est un fait qu'un projecteur orthogonal a toujours une matrice symétrique dans la base canonique.
5. Vérifier que dans les deux cas, on a bien $\mathbb{R}^2 = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$. Que peut-on dire sur l'application $\widetilde{p} := \mathrm{id} - p$? Déterminer en particulier $\ker \widetilde{p}$ et $\mathrm{Im}\, \widetilde{p}$.

Exercice 28. Soient $F := \text{Vect}(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^2$ et $G := \text{Vect}(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix})$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
2. Déterminer la matrice M qui entraîne la projection $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto M{\cdot}x$ sur F parallèlement à G.
3. Vérifier le résultat en calculant p de $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Vérifier aussi que $M^2 = M$.
4. Trouver la matrice M qui donne la projection sur G parallèlement à F.
5. Trouver la matrice M qui donne une projection orthogonale sur F.

<u>Exercice</u> 29.

1. Trouver l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui correspond à la projection sur la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$ parallèlement à la droite $y = 2x$. Quel est le rang de l'application f ?
2. Trouver l'application linéaire $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui correspond à la projection sur la droite d'équation $y = 2x$ parallèlement à la droite $y = \frac{3}{2}x$.

Exercice 30. Soit $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y - 2z, x - \frac{3}{2}y, -2x + 6z)$.

1. Montrer que p est une projection orthogonale sur le plan défini par l'équation $3x+2y+z = 0$.
2. Déterminer $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$. Quel est le rang de l'application p ? A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$?

<u>Exercice</u> 31. On rappelle que, par définition, un projecteur est un endomorphisme p d'un espace vectoriel E qui satisfait à $p^2 = p$. Un symétrique vectoriel est un endomorphisme s de E qui satisfait $s^2 = \text{id}$.

1. Soient p et s deux endomorphismes et $s = 2p - \text{id}$. Montrer que s est un symétrique vectoriel si et seulement si p est un projecteur.
2. Tout projecteur p est une projection sur son image $F := \text{Im}(p)$ parallèlement à son noyau $G := \ker(p)$; ainsi $p = p_F$ dans cette notation. Dénotons par p_G la projection sur G parallèlement à F. Montrer que $p_F + p_G = \text{id}$. Montrer également que $p_F \circ p_G = 0 = p_G \circ p_F$.
3. Exprimer une symétrie vectorielle s en fonction de p_F et p_G introduits ci-dessus (où $p = \frac{1}{2}(s + \text{id})$). Utiliser cette expression pour montrer par un calcul direct que $s^2 = \text{id}$.
4. Si $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une projection orthogonale sur un plan $\pi_n := \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, n\rangle = 0\}$, où $n \in \mathbb{R}^3$ désigne un vecteur normal au plan, quelle est la signification géométrique de l'endomorphisme s ?

Exercice 32. Donner un argument géométrique selon lequel les rotations dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des applications linéaires : Dans ce but, on désigne par $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une telle rotation (où n peut être 2 ou 3, selon le contexte). Nous observons d'abord que $f(0) = 0$ afin de pouvoir nous concentrer sur les vecteurs non nuls dans la suite.

1. Soit x un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Quel est le vecteur λx dans ce cas ? Et que signifie λx pour un λ strictement négatif ?
2. Argumenter maintenant qu'en effet $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
3. Soit x et y deux vecteurs non nuls qui ne sont pas non plus colinéaires (auquel cas l'un serait un multiple de l'autre, ce dont nous avons déjà discuté ci-dessus). On peut se convaincre qu'alors x, y, et $x + y$ forment toujours un triangle.
4. Quels sont les relations entre $f(x)$, $f(y)$ et $f(x + y)$? Est-ce qu'ils forment aussi un triangle et, si oui, lequel par rapport à celui trouvé ci-dessus ? Montrer que ce fait implique bien que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
5. Conclure.

Exercice 33. Soit $f_\alpha \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ une rotation dans le plan d'un angle (pas trop grand) α, $\alpha \in \mathbb{R} \bmod(2\pi) \equiv \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

1. Déterminer géométriquement $f_\alpha(e_1)$ et $f_\alpha(e_2)$, où $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la matrice M_α qui engendre cette application linéaire.
3. Montrer que $M_\alpha \cdot M_\beta = M_{\alpha+\beta}$.
4. En déduire $(M_\alpha)^{-1}$. Vérifier ensuite que $(M_\alpha)^{-1} = (M_\alpha)^T$ et que $\det(M_\alpha) = 1$.

Exercice 34. On se place sur $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique.

1. Quelles sont les matrices O telle que $O^T O = I$?
2. En fonction du déterminant, décrire géométriquement O.
3. Si on se place maintenant sur $\mathbb{C}^2$, quelles sont les matrices O de déterminant 1, telles que $O^T O = I$? (On pourra montrer qu'elles sont paramétrées par $\mathbb{C}^*$).
4. Quid de $O^\dagger O = I$? Ici, par définition, $O^\dagger = \bar{O}^T$, la transposée de la matrice complex conjugée.

Exercice 35.

1. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, trouver la matrice R^z_α d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe z d'un angle α.
2. Trouver la matrice R^x_α d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe x d'un angle α.
3. Trouver la matrice R^y_α d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe y d'un angle α.
4. Vérifier explicitement que les trois matrices satisfont la condition d'orthogonalité $R^T = R^{-1}$ et, en plus, $\det(R) = 1$.
5. Calculer $R^x_\alpha \cdot R^y_\beta$ et $R^y_\beta \cdot R^x_\alpha$. Que peut-on en conclure ?

Isomorphismes et changements de bases

Exercice 36. Dans cet exercice, on va déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire (où P' et P'' désignent la dérivée première et seconde du polynôme, respectivement)

$$\Psi \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P''$$

en utilisant les isomorphismes canoniques entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. Cela donnera un exemple de leur utilité, puisque la solution d'un problème d'équations différentielles est transposée de cette manière à un problème de matrices.

1. On désigne par $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique dans $\mathbb{R}_n[X]$ et par $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Définir une application linéaire $\varphi_{n+1} \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par la formule $\varphi_{n+1}(X^i) := e_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Montrer que c'est bien un isomorphisme pour chaque n. (Autrement dit, montrer que l'application est bien définie comme une application linéaire et que c'est une bijection).
2. Trouver la matrice $M \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ qui correspond à cette application. Se convaincre (par exemple à l'aide d'un ou deux exemples) que si l'on met $\psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto M \cdot x$, alors en effet $\psi = \varphi_4 \circ \Psi \circ (\varphi_3)^{-1}$.
3. Déterminer $\ker M$ et $\mathrm{Im}\ M$ par des méthodes habituelles. En particulier, construire des bases pour ces deux espaces.
4. Utiliser les isomorphismes pour déterminer $\ker \Psi$ et $\mathrm{Im}\ \Psi$ ainsi que leur base. (En particulier, par exemple, $\ker \Psi = (\varphi_3)^{-1}(\ker \psi) \equiv (\varphi_3)^{-1}(\ker M)$.
5. Vérifier explicitement que les vecteurs de base du noyau de Ψ satisfont bien l'équation différentielle
$$P + (X + X^2)P' + (-2 + 3X - X^3)P'' = 0.$$

Exercice 37. Soit

$$\Psi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_4[X], P \mapsto (1-2X+3X^2)P+(-2+3X-4X^2-2X^3)P'+(1+2X-3X^2+2X^3+3X^4)P''$$

Déterminer $\ker \Psi$ et $\operatorname{Im} \Psi$ ainsi que leur bases.
Indication : Utiliser les bases canoniques de $R_n[X]$ pour transformer ce problème en un problème matriciel dans une étape intermédiaire.

Exercice 38. Soit $h\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire définie par $h(P) = 2P' + P$.

1. Trouver la matrice de h dans la base canonique.
2. Quel est le rang de h ?
3. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 2 + X, 4X + X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice de h dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ pour l'espace de départ et la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de d'arrivée.

Exercice 39. Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ la base $((1, 2), (3, -1))$.

1. Trouver la matrice $P \equiv P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ qui transforme un vecteur de $\mathcal{B}$ en un vecteur de $\mathcal{E}$ telle que $[x]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$ pour tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^2$.
   Remarque : Puisque $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $[x]_{\mathcal{E}} = x$.
2. Déterminer P^{-1}.
3. Déterminer $[x]_{\mathcal{B}}$ pour $x = (4, 1)$, $x = (-2, 3)$ et $x = (-3, 8)$.
4. Soit $f(x, y) = (-4x + 3y, 2x + y)$, donc $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$. Trouver $M := [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \equiv [f]_{\mathcal{B}}$, la matrice qui correspond à f dans la base $\mathcal{B}$, une fois par un calcul direct pour la fonction f et une autre fois en utilisant les matrices de passage trouvées dans les questions précédentes.

Exercice 40. Différents choix de base peuvent également être utiles, même si l'on ne travaille que dans $\mathbb{R}^n$. Ceci est montré aussi à l'aide des exemples suivants.

1. Dans l'exercice 27.2 on a construit l'application p qui a la propriété que $p(v) = v$ et $p(w) = 0$ où $v = (1, 2)$ et $w = (3, 2)$ (cf. aussi exercice 27.3). De toute évidence, $\mathcal{B} := (v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice $N := [p]_{\mathcal{B}}$, la matrice qui correspond à l'application p dans cette base. En déduire la matrice M par une conjugaison appropriée, $M = PNP^{-1}$.
2. Montrer que si l'on a un projecteur $p \in \operatorname{End}(E)$ dans un espace vectoriel E, il existe une base telle que la matrice M correspondant à p dans cette base prend la forme diagonale suivante $M = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ où le nombre d'elements non-zero est égal à $\operatorname{rg}(p)$.
3. Par ces méthodes, trouver l'application p de l'exercice 30, c'est-à-dire construire l'endomorphisme $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui fournit la projection orthogonale sur le plan $\pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y + z = 0\}$.

Exercice 41. Trouver la matrice M de l'exercice 27.4 avec la méthode de l'exercice précédent.

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ **42.** Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2e_1 - e_2 + e_3$, $w = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, c.-à-d. la matrice P telle que $[x]_{\mathcal{E}} = P[x]_{\mathcal{B}}$.
3. Calculer P^{-1}.
4. Déterminer la matrice $R = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.
5. Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R.
6. Calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n} pour tous les $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 43. Soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, -x - y, 5x - y).$$

1. Trouver la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{E}$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1))$ est une base pour $\mathbb{R}^3$ et trouver la matrice de passage P telle que $P[x]_{\mathcal{B}} = [x]_{\mathcal{E}}$.

Exercice 44. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par la matrice A donnée dans la base canonique de E : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices des applications g et h suivantes : $g = f - \mathrm{id}$ et $h = f + 3\,\mathrm{id}$, où id désigne l'application identité dans E.
2. Déterminer $\ker(g)$ et en donner une base $\mathcal{B}_1$.
3. Déterminer $\ker(h)$ et en donner une base $\mathcal{B}_2$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 45 (Polynômes de Lagrange, Vandermonde, Transformée de Fourier discrète, convolution)**.**
On se place sur $E = \mathbb{C}_N[X]$.

1. (a) Soit $(x_0, .., x_N)$ des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $ev_{x_i} : \mathbb{C}_N[X] \to \mathbb{C}$, $ev_{x_i}(P) = P(x_i)$ est une base de E.
   (b) Quelle est la base préduale de ev_{x_i} ? (On l'appelle base des polynômes de Lagrange).
2. On s'intéresse à l'opérateur :
$$m_P : \mathbb{C}_N[X] \to \mathbb{C}_N[X]$$
$$Q(X) \mapsto P(X)Q(X) \bmod (X^{N+1} - 1)$$
   (On remplacera X^{N+1} par 1).
   (a) Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{N} a_j X^j$. Quelle est la matrice M_P de m_P dans la base canonique de $\mathbb{C}_N[X]$? Exhiber M_X.
   (b) Montrer que $M_P = \sum_{j=0}^{N} a_j (M_X)^j$.

(c) En choisissant $(x_0, .., x_N) = (1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2, .., \bar{\omega}^N)$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N+1}}$. Montrer que la famille $f_k = (1, \bar{\omega}^k, \bar{\omega}^{2k}, .., \bar{\omega}^{kN}) \in \mathbb{C}^{N+1}$ forme une base de $\mathbb{C}^{N+1}$. Donner la matrice de passage de celle-ci à la base canonique, ainsi que son inverse. (Faire appel aux polynômes de Lagrange)

(d) Calculer $M_X f_k$.

(e) En déduire qu'il existe une matrice U telle que $M_X = UDU^{-1}$ et $M_P = U\Delta U^{-1}$. On exprimera D et Δ.

(f) En déduire une formule pour $m_P(Q)$ en fonction de U et les $P(\omega_k)Q(\omega_k)$.

$$\frac{1}{N+1} U \begin{pmatrix} P(1)Q(1) \\ P(\omega)Q(\omega) \\ . \\ . \\ P(\omega^N)Q(\omega^N) \end{pmatrix}$$

C'est l'algorithme de la transformée de Fourier discrète pour le produit de deux polynômes (et donc nombre entiers). Une "astuce" portant sur l'évaluation des polynômes en ω^i (factorisation par bloc de U) permet de réduire la complexité de la multiplication de $O(N^2)$ en $O(N \log(n))$. C'est la transformée de Fourier rapide ("FFT") et c'est le meilleur algorithme de multiplication des nombres entiers de taille 2^n en général.