

## Nombres réels et suites

**Exercice 1 (\*)** Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 2\} \quad ; \quad B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\} \quad ; \quad C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p} : n, p \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

### Exercice 2

- Pour  $x, y \in \mathbf{R}_+^*$ , montrer que  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .
- Déterminer, pour  $n$  fixé,  
 $\inf \left\{ (x_1 + \dots + x_n) \times \left( \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^{+*} \right\}$ . Cet infimum est-il un minimum ?

**Exercice 3** Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  une application bornée. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \inf_{y \in \mathbf{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbf{R}} \sup_{x \in \mathbf{R}} f(x, y).$$

**Exercice 4 (\*)** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une application croissante.

- Montrer que l'ensemble  $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \leq x\}$  admet une borne inférieure  $b$ .
- Montrer que  $f(b) = b$ .

**Exercice 5 (\*)** Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites  $u$ ,  $v$  et  $w$  de termes généraux

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} \quad ; \quad v_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n) \quad \text{et} \quad w_n = \sqrt{n} \ln \left( \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1} \right).$$

**Exercice 6** Montrer que la suite de terme général  $w_n = \cos \left( \left( n + \frac{1}{n} \right) \pi \right)$  diverge.

**Exercice 7** Étudier la suite définie récursivement par  $u_0 \in \mathbf{C}$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{5} (3u_n - 2\overline{u_n})$ .

**Exercice 8** Soit  $a \in \mathbf{C}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbf{C}$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n^2$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $u_0$  pour que la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

**Exercice 9** Soit  $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ .

- On suppose que les suites extraites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  convergent vers la même limite. Montrer que  $u$  converge.
- Donner un exemple de suite telle que  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  convergent mais pas  $(u_n)_n$ .
- On suppose que les suites extraites  $(u_{2n})_n$ ,  $(u_{2n+1})_n$  et  $(u_{3n})_n$  convergent. Montrer que  $u$  converge.

**Exercice 10 (\*)** Soit  $u$  une suite. On définit une suite  $S$  par  $S_n = \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1}$ .

- (a) On suppose que  $u$  tend vers 0. Montrer qu'alors  $S_n \rightarrow 0$ .  
(b) En déduire que, si  $u$  est convergente, alors  $S$  converge et a la même limite que  $u$ .
- Si  $u_n = (-1)^n$ , montrer que la suite  $S$  converge.
- Si  $u_n \rightarrow +\infty$ , montrer que  $S_n \rightarrow +\infty$ .

## Continuité et dérivabilité

**Exercice 11** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue. On suppose qu'il existe  $\ell \in [0, 1[$  tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**Exercice 12** Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $a < b$ . Soit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  deux fonctions continues. On suppose que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) > g(x) > 0$ . Montrer qu'il existe  $k > 1$  tel que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq kg(x)$ .

**Exercice 13 (\*)** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Montrer que  $f$  admet un minimum global sur  $\mathbf{R}$ .

### Exercice 14

- Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $|\sin x| \leq |x|$ .
- (a) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ .  
(b) On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  par : pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Déduire de la question précédente que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

### Exercice 15

1. Montrer que  $x \mapsto x \ln x$  est uniformément continue sur  $]0, 1]$ .
2. Montrer que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+$ .
3. Montrer que  $x \mapsto \ln x$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+^*$ .
4. Soit  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbf{R}$  uniformément continue. Montrer que  $f$  est bornée.

**Exercice 16** Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

$$f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto (1 + |x|)e^{-|x|} \quad ; \quad f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exercice 17 (\*)** Soit  $n \in \mathbf{Z}$ . On définit  $f_n : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \mapsto x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

1. À quelle condition sur  $n$  la fonction  $f_n$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition sur  $n$  ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. À quelle condition sur  $n$  cette dérivée est-elle continue en 0 ?

### Exercice 18 (\*)

1. Montrer que l'équation (E) :  $2 \ln x - x + 2 = 0$  en  $x \in \mathbf{R}_+^*$  admet une unique solution sur  $[2, +\infty[$ .  
On note  $a$  cette solution. Vérifier que de plus  $a \in ]5, 6]$ .
2. Afin de déterminer une approximation de  $a$ , on introduit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ , où  $\varphi : [2, +\infty[ \rightarrow [2, +\infty[$  est définie par  $\varphi(x) = 2 \ln x + 2$  pour tout  $x \geq 2$ .
  - i. Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \in [5, 6]$ .
  - ii. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante.
  - iii. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est convergente et que sa limite est  $a$ .
- (b)
  - i. Montrer que, pour tout  $x \in [5, 6]$ ,  $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$ .
  - ii. En déduire que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5} |u_n - a|.$$

$$\text{iii. Démontrer que, pour tout } n \in \mathbf{N}, |u_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

- (c) Déterminer un entier  $n$  tel que  $u_n$  soit une valeur approchée de  $a$  à  $10^{-3}$  près.

## Fonctions trigonométriques

**Exercice 19 (\*)** Calculer les quantités suivantes :

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$             | 3. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$  | 5. $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{82\pi}{11}\right)\right)$ |
| 2. $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 4. $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right)$ | 6. $\text{sh}(\text{Argsh}(1))$                                  |
|  |  | 7. $\text{Argch}(\text{ch}(1 - \ln 5))$ .                        |

**Exercice 20** Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. On note  $\theta$  l'argument du nombre complexe  $a + ib$  qui vérifie  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

1. Avec un argument géométrique, montrer que  $\theta = \text{Arctan} \frac{b}{a}$ .
2. En déduire que le réel  $\text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} + \text{Arctan} \frac{1}{8}$  est un argument du nombre complexe  $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$ .
3. Calculer également les parties réelle et imaginaire de  $(2 + i)(5 + i)(8 + i)$  et en déduire une expression simple de  $\text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} + \text{Arctan} \frac{1}{8}$ .

### Exercice 21

1. Calculer  $\text{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$  et  $\text{sh}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$ .
2. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :

$$2 \text{ ch}(x) + \text{sh}(x) = \sqrt{3} \text{ ch}(5x).$$

**Exercice 22** Résoudre le système suivant d'inconnues réelles  $x$  et  $y$  :

$$\begin{cases} \text{ch}(x) + \text{ch}(y) = 3 \\ \text{sh}(x) + \text{sh}(y) = 2 \end{cases}.$$

### Exercice 23 (\*) Linéarisation

1. Soit  $u \in \mathbf{R}$ . Exprimer  $\text{ch}^5(u)$  en fonction de puissances de  $e^u$  puis en fonction de termes du type  $\text{ch}(ku)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ .
2. Même question avec  $\text{sh}^4(u)$ .

**Exercice 24** Montrer que l'équation  $\text{Argsh } x + \text{Argch } x = 1$  admet une unique solution réelle, puis la déterminer.

**Exercice 25 (\*)** On considère la fonction  $f : x \mapsto \text{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$ .

1. Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de  $f$  ?
2. Calculer  $f'$  là où elle est définie et en déduire une expression plus simple de  $f$ .
3. Représenter le graphe de  $f$ .