Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire : Analyse 2, Algèbre 2

Feuille 7
Espaces engendrés ; bases ; dimension ; supplémentaires

Exercice 1 Soit $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$.

1. Donner un système de 2 équations à 4 inconnues dont l'ensemble des solutions soit égal à $\mathrm{Vect}(u, v)$.
2. Peut-on trouver $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}(u, v)$? Pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}(u, v)$?

Exercice 2(∗) Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2y - z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\}$.
4. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$.
5. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
6. $F_3 = F_1 \cap F_2$.

Exercice 3 Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 4
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ 3x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de E, puis une base de F.
3. Déterminer une base de $E + F$, puis une base de $E \cap F$.
4. Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel, et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H, \quad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 6(∗)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}^6$, tous les deux de dimension 4. Quelle peut-être la dimension de $F + G$? de $F \cap G$?

Exercice 7(∗) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 8($*$) Soit E l'espace vectoriel des suites de réels.

1. Soit $F \subset E$ l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence
$$\forall n \geqslant 0 \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$
Déterminer toutes les suites (u_n) dans F telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.
2. Même question avec $G \subset E$ l'ensemble des suites (v_n) qui vérifient la relation de récurrence
$$\forall n \geqslant 0 \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n \,, \quad \text{avec}\, v_0 = v_1 = 1.$$

Exercice 9 Soit E l'ensemble des suites convergentes de nombres réels. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites qui convergent vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 10 Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes qui sont des multiples de P et dont le degré est inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de E. Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme sans racine commune (réelle ou complexe) avec P, et tel que $\deg(P) + \deg(Q) = n + 1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U, V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 11
Soient $n \geqslant 1$ et $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. On définit
$$E_a = \{P \in E : (X - a) \text{ divise } P\}$$
pour $a \in \mathbf{R}$. Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X - a) + d(X - b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Exercice 12 Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications dérivables de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Soit F le sous-ensemble de E formé par les applications f telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 13 Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soient P et I les sous-ensembles de E formés respectivement des fonctions paires et impaires. Montrer que P et I sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Exercice 14
Soient les sous-espaces des matrices *symétriques* $S = \{M \in M_3(\mathbf{R}) \mid {}^tM = M\}$ et *antisymétriques* $A = \{M \in M_3(\mathbf{R}) \mid {}^tM = -M\}$ de $M_3(\mathbf{R})$.

1. Déterminer les dimensions de S et de A.
2. Montrer que $M_3(\mathbf{R}) = S \oplus A$.

Exercice 15

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbf{R})$.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que $M_2(\mathbf{R}) = E \oplus F$.