Feuille n° 5 : Intégrales

Exercice 1 ($*$) Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction croissante.

1. Soit $n \geqslant 1$ et $x_0, x_1, \dots, x_n$ la division de $[a, b]$ en n parties égales.
   (a) En s'aidant d'un dessin, définir le plus naturellement possible deux fonctions en escalier φ et Φ sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leqslant f$ et $f \leqslant \Phi$.
   (b) Calculer $I(\Phi) - I(\varphi)$.
2. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Exercice 2 Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est à valeurs positives, et telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.
2. Montrer que f est de signe constant sur $[a, b]$ si et seulement si
$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Exercice 3 ($*$) Intégrales, parité et périodicité.

1. Soit $a > 0$. Soit $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.
   (a) Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que si f est impaire , alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ et T-périodique.
   (a) Montrer que pour tous réels a et b, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que pour tout réel a, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

(a) ($*$) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) ($*$) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$
(c) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$
(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$
(e) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$
(f) ($*$) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$
(g) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$
(h) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$
(i) ($*$) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$
(j) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$
(k) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5 ($*$) En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, calculer :
$$I = \int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 ($*$) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
(b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$
(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$
(d) $\displaystyle\int_0^{1/2} (\operatorname{Arcsin} x)^2\,\mathrm{d}x$
(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x\,dx}{1+\cos^2 x}$
(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\cos x}$

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+3)\,\mathrm{d}x$
(b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \cos\theta$)
(c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$)
(d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-2}}$ (poser $t = \sqrt{2}/x$)
(e) $\displaystyle\int_2^3 x^2\ln(x^6-1)\,\mathrm{d}x$ (poser $t = x^3$)
(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)^n}$
(h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\varphi}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$
(j) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{t+7}{t+6}}\,\mathrm{d}t$

Exercice 8 ($*$) On note $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq e^{x/2}$.
2. Dessiner D.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 9 (∗) Démontrer, à l'aide de majorations, les limites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0.$
2. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0.$
3. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}(\sin x)^n\,\mathrm{d}x=0.$
4. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{e^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x=0.$
5. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x=1.$

Exercice 10

1. Montrer que $\frac{1}{R^4}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\to 0$ quand $R\to+\infty$.
2. (a) Soient $t\in\mathbf{R}$ et $R>0$. Montrer que $|1+R^2e^{it}|^2\geqslant(R^2-1)^2$.
   (b) Montrer que $R\int_0^{\pi}\frac{e^{it}}{1+R^2e^{it}}\,\mathrm{d}t\to 0$ quand $R\to+\infty$.

Exercice 11 (∗) Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction continue. Pour $n\geqslant 1$, on pose $I_n=\int_0^1 t^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n\to 0$ lorsque $n\to+\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Effectuer une intégration par parties sur I_n puis montrer que $nI_n\to f(1)$ lorsque $n\to+\infty$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt\to 0$.

Exercice 12 (∗) Pour $n\in\mathbf{N}$, on définit $w_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Montrer que $w_n>0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que $nw_n=(n-1)w_{n-2}$ pour tout $n\geqslant 2$.
2. Déduire des résultats précédents que $w_n\sim w_{n-1}$ quand $n\to+\infty$.
3. Justifier que la suite $(nw_nw_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante, puis en déduire que

$$w_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 13 (∗) On définit une application $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\frac{t-1}{\ln t}\quad\text{pour } t\in]0,1[\,,\quad f(0)=0 \text{ et } f(1)=1\,.$$

On définit également une application $F:]0,1[\to\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\,.$$

1. Montrer que f est continue sur $]0,1[$.
2. Pour $x\in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4. (a) Pour $x\in]0,1[$, montrer que $\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\ln 2$.
   (b) Pour $x\in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2\ln 2\leqslant F(x)\leqslant x\ln 2$.
   (c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{x\to 1^-}F(x)$.
   (d) En déduire que $\lim_{x\to 0^+}F(x)=0$.
5. (Bonus)
   (a) Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14 (∗) Calculer les limites des suites suivantes :

1. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$;
2. $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$;
3. $c_n=\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{1/n}$;
4. $d_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$;

Indication pour (d_n) : $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$ *pour tout* $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 15 Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\int_0^1\ln(f(t))\,\mathrm{d}t\leq\ln\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$