
Devoir surveillé 4

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Soient e_1, e_2, e_3 trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. On suppose que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. On pose $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + e_3$, $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.
2. Soit F le sous-espace engendré par (e_1, e_2, e_3). Montrer que F est égal au sous-espace engendré par (v_1, v_2, v_3).
3. Soit G un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$. Quelle est la dimension de G ? Justifier votre réponse.
4. On suppose désormais que $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ et $e_3 = (0, 0, 0, 1)$. Trouver des constantes réelles a, b, c et d telles que l'ensemble des solutions $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ de l'équation $ax + by + cz + dt = 0$ soit égal à F.
5. Expliciter un supplémentaire G de F.

Exercice 2 On note $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1. (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.
   (b) Soit $p \in C^3(\mathbf{R})$. Ecrire le développement limité de p au voisinage de $a = 1$ à l'ordre 3.
   (c) Soit $P \in \mathbf{R}_3[X]$. Exprimer P dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Soit $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \ : \ 2P(1) + 2P'(1) + P''(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.
   (b) Calculer la dimension de F.

Exercice 3 Résoudre en $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable deux fois, l'équation différentielle suivante.

$$f'' - 4f = 4(1 - 2\cos(2t))$$

Donner la solution telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 4 Résoudre en $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ dérivable une fois, l'équation différentielle suivante.

$$f' + 2\tan(x)\, f = \exp(\tan(x))$$

On pourra appliquer la méthode de variation de constante pour trouver une solution particulière de l'équation.