Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 — 29 mars 2023

Devoir surveillé n°3

Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1. Parmi ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? Dans chacun des cas, démontrez votre réponse.

1. L'ensemble $D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - y + z = 0\}$.
2. L'ensemble $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x+y)(x-2y) = 0\}$.

Exercice 2. Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions suivantes.

$$1.\ \int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad 2.\ \int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes.

$$1.\ \int_{-1}^{0} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x \qquad 2.\ \int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad 3.\ \int_{1}^{e} \frac{1}{2x - x\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}.$$

Justifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Calculer cette limite.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une majoration, montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$I_n = (-1)^n I_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k}.$$
5. Montrer que
$$\ln(2) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$