Devoir surveillé 2

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{X^3+2X^2+1}{X^2-1} \quad ; \quad G(X) = \frac{3X^2-2X+1}{(X^2+1)(X-1)^2}.$$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.

Exercice 3 Mettre la matrice de $M_4(\mathbf{R})$ suivante sous forme échelonnée en lignes, puis en déduire une base de son noyau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 On fixe un entier $n \geqslant 1$.

1. Rappeler la définition vue en cours d'une matrice inversible de $M_n(\mathbf{R})$.
2. On considère trois matrices A, B et C de $M_n(\mathbf{R})$ telles que $BA = I$ et $AC = I$ où I est la matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $C = B$.
3. Soit M une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel M^k est inversible. Montrer que M est inversible.
4. Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel $N^k = 0$. Montrer que N n'est pas inversible.

Exercice 5 On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I + N$ où I est la matrice identité de $M_2(\mathbf{R})$.

1. Calculer N^2, puis N^k pour tout entier $k \geqslant 2$.
2. En utilisant la formule du binôme, calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 1$. (On justifiera pourquoi on peut utiliser ici la formule du binôme).

On considère maintenant deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par les relations de récurrence suivantes :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2 \quad \text{et pour } n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = 3v_n - u_n.$$

3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
5. Exprimer en fonction de $n \in \mathbf{N}$ les termes u_n et v_n.