Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 15 mars 2023

Devoir surveillé 2

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F(X) = \frac{X^3 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1} \quad ; \quad G(X) = \frac{3X^2 - 2X + 1}{(X^2 + 1)(X - 1)^2}.$$

Solution : $\deg F = 1$ et par division euclidienne, on obtient

$$F(X) = X + 2 + \frac{X + 3}{X^2 - 1} = X + 2 + \frac{X + 3}{(X - 1)(X + 1)}.$$

Cette fraction rationnelle a deux pôles simples 1 et -1 et d'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe ainsi deux uniques réels a et b tels que

$$F(X) = X + 2 + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1}.$$

On détermine a en évaluant $(X - 1)F(X)$ en 1 : $a = (1 + 2 + 1)/2 = 2$.
On calcule b en évaluant $(X + 1)F(X)$ en -1 : $b = (-1 + 2 + 1)/(-2) = -1$.
Conclusion :

$$F(X) = X + 2 + \frac{2}{X - 1} - \frac{1}{X + 1}.$$

G est de degré strictement négatif, a 1 pour pôle double et son dénominateur a un dernier facteur $X^2 + 1$ qui est un facteur irréductible sur $\mathbf{R}$. Ainsi, par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe des uniques réels α, β, γ et δ tels que

$$G(X) = \frac{\alpha}{(X - 1)^2} + \frac{\beta}{(X - 1)} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2 + 1}.$$

On calcule α en évaluant $(X - 1)^2 G(X)$ en 1 : $\alpha = (3 - 2 + 1)/(1 + 1) = 1$.
Déterminons γ et δ en évaluant $(X^2 + 1)G(X)$ en i. On obtient ainsi $\gamma i + \delta = (3i^2 - 2i + 1)/(i - 1)^2 = -2(1 + i)/(-1 - 2i + 1) = (1 + i)/i = -i + 1$. Donc, $\gamma = -1$ et $\delta = 1$.
Enfin, en calculant la limite en $+\infty$ de $XG(X)$, on a $\beta + \gamma = 0$ et donc $\beta = 1$.
Conclusion :

$$G(X) = \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{1}{(X - 1)} + \frac{1 - X}{X^2 + 1}.$$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 2)}$.

Solution : Par décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{X(X + 2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X + 2}\right)$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k + 2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n + 2}\right) = \frac{n(3n + 5)}{4(n + 1)(n + 2)}.$$

Exercice 3 Mettre la matrice de $M_4(\mathbf{R})$ suivante sous forme échelonnée en lignes, puis en déduire une base de son noyau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker A$ correspond alors à l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y - 2z + t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$ et on obtient $\ker A = \{(-t, -3t, -t, t) \colon t \in \mathbf{R}\}$. Le vecteur $(1, 3, 1, -1)$ forme ainsi une base de $\ker A$.

Exercice 4 On fixe un entier $n \geqslant 1$.

1. Rappeler la définition vue en cours d'une matrice inversible de $M_n(\mathbf{R})$.
   Solution : Une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ est inversible s'il existe une matrice B de $M_n(\mathbf{R})$ telle que $AB = I$ et $BA = I$. Remarque $(\star)$: on démontrera plus tard dans le semestre qu'il suffit de vérifier l'une des deux égalités.)
2. On considère trois matrices A, B et C de $M_n(\mathbf{R})$ telles que $BA = I$ et $AC = I$ où I est la matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $C = B$.
   Solution : $C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B$ donc $C = B$. (En admettant le résultat $(\star)$, on peut également justifier que $C = B$ par le fait que $BA = I$ et $AC = I$ entraînent alors que B et C sont toutes deux l'inverse de A.)
3. Soit M une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel M^k est inversible. Montrer que M est inversible.
   Solution : Considérons un entier $k \geqslant 1$ tel que M^k soit inversible et notons A l'inverse de M^k. Alors $M^k A = I$, donc $M(M^{k-1}A) = I$. De même $AM^k = I$ donc $(AM^{k-1})M = I$. Par la question précédente, $M^{k-1}A = AM^{k-1}$ et M est ainsi inversible d'inverse $M^{k-1}A$. (En admettant à nouveau $(\star)$, l'égalité $M(M^{k-1}A) = I$ suffit pour conclure.)
4. Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ telle qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ pour lequel $N^k = 0$. Montrer que N n'est pas inversible.
   Solution : Il a été vu en cours que si N était inversible (d'inverse P) alors pour chaque $k \geqslant 1$, N^k le serait également, d'inverse P^k. Or la matrice nulle n'est pas inversible (en effet pour tout $B \in M_n(\mathbf{R})$, $B\,0 = 0 \neq I$), donc N ne peut être inversible.
   Autre méthode : choisissons le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $N^k = 0$. Si N était inversible alors, $N^{k-1} = N^{-1}N^k = 0$ et donc par minimalité de k, on aurait $k = 1$ et donc $I = N^0 = N^{1-1} = 0$, ce qui donnerait une contradiction.

Exercice 5 On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I + N$ où I est la matrice identité de $M_2(\mathbf{R})$.

1. Calculer N^2, puis N^k pour tout entier $k \geqslant 2$.
   Solution : $N^2 = 0$ et donc pour chaque $k \geqslant 2$, $N^k = N^{k-2}N^2 = N^{k-2}\,0 = 0$.
2. En utilisant la formule du binôme, calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 1$. (On justifiera pourquoi on peut utiliser ici la formule du binôme).
   Solution : Comme $2I$ commute avec toutes les matrices de $M_2(\mathbf{R})$, en utilisant la formule du binôme de Newton puis la question précédente, on obtient pour $n \geqslant 1$:

$$A^n = (2I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} = 2^n I + n2^{n-1} N = 2^{n-1}(2I + nN) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & 2+n \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par les relations de récurrence suivantes :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2 \quad \text{ et pour } n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + v_n, \quad v_{n+1} = 3v_n - u_n.$$

3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   Solution : Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ -u_n + 3v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

   Solution : Vérifions cette propriété par récurrence sur n.
   Initialisation : $A^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que $A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors, par cette hypothèse de récurrence puis l'égalité de la question 3, on a

$$A^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A \left(A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   On a ainsi vérifié que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

5. Exprimer en fonction de $n \in \mathbf{N}$ les termes u_n et v_n.
   Solution : En utilisant le résultat précédent et celui de la question 2 (qui est également valable pour $n = 0$), on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & 2+n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} (2-n) + 2n \\ -n + 2(2+n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+2) \\ 2^{n-1}(n+4) \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n = 2^{n-1}(n+2)$ et $v_n = 2^{n-1}(n+4)$.