Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire : Algèbre 2 et Analyse 2 8 février 2023

Devoir surveillé n°1

Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1 Calculer le développement limité des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \ln(1 + \sin(2x))$ à l'ordre 3 en 0.

On a d'une part : $\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$, *d'où l'on tire :*

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\,.$$

Par suite, avec $\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$, *on aboutit à :*

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin(2x)) &= \left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(2x - \frac{4}{3}x^3\right)^3 + o(x^3)\\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}\times 4x^2 + \frac{1}{3}\times 8x^3 + o(x^3)\\ &= 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\,.\end{aligned}$$

2. $f(x) = (\cosh(x))^{1/x}$ à l'ordre 3 en 0.

On a $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(\cosh(x))\right)$, *on commence donc par établir un développement limité de* $\frac{1}{x}\ln(\cosh(x))$. *On a :*

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\,,$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}\ln(\cosh(x)) &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^4)\\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\,,\end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{x}\ln(\cosh(x)) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$. *On utilise enfin le développement limité de la fonction exponentielle en 0 :* $\exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$, *avec* $v = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$ *:*

$$\exp(v) = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)^3 + o(v^3)\,,$$

et le calcul donne :

$$(\cosh(x))^{1/x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\,.$$

3. $f(x) = 1 - x + (x-1)^2$ à l'ordre 3 en 0.
   f étant un polynôme de degré 2, la formule est donc exacte. Il s'agit simplement d'écrire ici $f(x) = 2 - 3x + x^2$.
4. $f(x) = 1 - x + (x-1)^2$ à l'ordre 3 en 1.
   On écrit $f(x) = (x-1) + (x-1)^2$.

Exercice 2 On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
Montrer que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer. Préciser s'il s'agit d'un minimum et d'un maximum.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a un premier encadrement grossier $-1 < (-1)^n + \dfrac{1}{n} < 2$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est borné. Etant non vide, il admet une borne inférieure et une borne supérieure.
Considérons la suite $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ définie pour tout $m \in \mathbf{N}$ par $u_m = (-1)^{2m+1} + \dfrac{1}{2m+1}$. Il s'agit d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers -1, ce qui établit que -1 est la borne inférieure de $\mathcal{A}$. Cette borne n'est pas atteinte en vertu de l'inégalité stricte $-1 < (-1)^n + \dfrac{1}{n}$: -1 n'est pas un minimum.
Remarquons que si n est pair, alors $(-1)^n + \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ et que si n est impair, $(-1)^n + \dfrac{1}{n} = -1 + \dfrac{1}{n}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ peut donc s'écrire :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^- \cup \mathcal{A}^+ = \left\{ -1 + \frac{1}{2p+1} \quad , \quad p \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{1}{2q} \quad , \quad q \in \mathbb{N}^* \right\},$$

avec $\mathcal{A}^- \subset \mathbb{R}^-$ et $\mathcal{A}^+ \subset \mathbb{R}^+$. Ainsi $\sup(\mathcal{A}) = \sup(\mathcal{A}^+)$. Ce sup est atteint pour $q = 1$, et on a $\sup \mathcal{A}^+ = \sup \mathcal{A}^+ = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 3 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Indication : utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de a
On écrit :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2),$$
$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2),$$

ce qui donne après sommation :

$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = h^2 f''(a) + o(h^2).$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2} - (1+x)}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
   On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$, et donc :

$$f(x) = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{-1 - \frac{x}{2} + o(x^2)} = -\frac{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + o(x^2)}.$$

On utilise alors le développement limité $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$, *pour obtenir :*

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + o(x^2) \\ &= -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\,. \end{aligned}$$

2. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
   On déduit de la question précédente que $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$.
3. Déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
   La question 1. permet de conclure que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1/2$. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est donc donnée par $y(x) = -1 + x/2$. Le terme d'ordre 2 dans le développement limité obtenu ($-\dfrac{x^2}{12}$) *étant affecté d'un signe négatif, on en déduit que le graphe de f est situé en dessous de sa tangente en 0.*

Exercice 5 On considère la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \ln(x) \end{array}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, l'équation $x + \ln(x) = n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet une unique solution, que l'on notera u_n.
   La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 1 + 1/x$ pour tout $x > 0$. Elle est donc strictement croissante et réalise un bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution.
2. (a) Montrer que $\ln(x) \leqslant x$ pour tout $x > 0$.
   Ce résultat se déduit d'une simple étude de fonctions.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.
   On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $n = u_n + \ln(u_n) \leqslant 2u_n$, en obtient le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ayant pour limite $+\infty$, elle est strictement positive à partir d'un certain rang $N \in \mathbf{N}$. En revenant à la définition de (u_n), on a $u_n + \ln(u_n) = n$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui se réécrit $\dfrac{u_n}{n}\left(1 + \dfrac{\ln(u_n)}{u_n}\right) = 1$ *pour tout $n \geqslant N$. Par suite, en utilisant* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$, *on aboutit au résultat $u_n \sim n$.*