

Conexion DS 3

Exercice 1:

1) On a $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^3} \in \mathcal{D}_2$. Soit (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) dans $\mathcal{D}_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ On a

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) \\ &= (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & 2(x_1 + \lambda x_2) - (y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2) \\ &= (2x_1 - y_1 + z_1) + \lambda(2x_2 - y_2 + z_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) \in \mathcal{D}_2$.

Ainsi $\mathcal{D}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2) On a $(1, -1) \in \mathcal{D}_2$, $(2, 1) \in \mathcal{D}_2$ mais $(1, -1) + (2, 1) = (3, 0) \notin \mathcal{D}_2$. Donc $\mathcal{D}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2:

1) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1+1)}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1}$$

2) Ainsi sur tout sous-intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, une primitive de $\frac{x^3}{(x^2-1)}$ est

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln |x^2-1| + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

2) Le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$.

On écrit

$$\textcircled{2} \quad \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$\text{avec} \quad \int \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-x+1| + c_1$$

pour $x \in \mathbb{R}$ et une constante $c_1 \in \mathbb{R}$.

On a $\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2 + 1}$

donc $\int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (x-\frac{1}{2}) \right) + c_2$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (x-\frac{1}{2}) \right) + c_2$

pour $x \in \mathbb{R}$ et une constante $c_2 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient que

$$\int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (x-\frac{1}{2}) \right) + c,$$

$c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3:

1) On remarque que $\frac{d}{dx}(x^2-3x+2) = 2x-3$ donc

(1) $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx = \left[2\sqrt{x^2-3x+2} \right]_{-1}^0$
 $= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1+3+2}$
 $= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

2) Effectuons une intégration par parties en posant
 $u = \ln x$ et $u' = 1/\sqrt{x}$

donc $u' = 1/x$ et $v = 2\sqrt{x}$.

Ainsi: $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \left[2 \ln x \sqrt{x} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{x} dx$
 $= 2\sqrt{2} \ln(2) - 2 \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 $= 2\sqrt{2} \ln(2) - 2 \left[2\sqrt{x} \right]_1^2$
 $= 2\sqrt{2} \ln(2) - (4\sqrt{2} - 4).$

(1,5)

3) On a $\frac{1}{2x-x \ln(x)} = \frac{1/x}{2-\ln(x)} = -\frac{1/x}{\ln(x)-2}$.

(1,5)

donc $\int_1^e \frac{1}{2x-x \ln(x)} dx = - \left[\ln|\ln(x)-2| \right]_1^e$

car $x \mapsto \ln(x)-2$ est continue et ne s'annule

pas sur $[1, e]$. L'intégrale cherchée est donc
 $-(\ln|1-2| - \ln|0-2|) = -\ln 1 + \ln 2 = +\ln 2$.

Exercice 4:

Soit $n \geq 1$ un entier. On a $\sqrt{n^2} = |n| = n$ donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{k}{\sqrt{4 - k^2/n^2}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k/n}{\sqrt{4 - (k/n)^2}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n), \end{aligned}$$

③ avec $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

f est définie et continue sur $[0, 1]$. on obtient une somme de Riemann de f sur $[0, 1]$ associée à une subdivision de pas $1/n$. Comme $1/n \rightarrow 0$, on a

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (-1) \times \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2}} dx \\ &= (-1) \times \left[\sqrt{4 - x^2} \right]_0^1 \\ &= -(\sqrt{4 - 1} - \sqrt{4 - 0}) \\ &= -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers $2 - \sqrt{3}$.

Exercice 5:

① 1) On a $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln|x+1| \right]_0^1$
 $= \ln(2)$.

2) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{x^n}{n+1} \leq x^n$$

d'où $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$

(1) avec $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

(1)
$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{n+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{n+1} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n : " $I_n = (-1)^n I_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k}$ ".

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: On a $(-1)^0 I_0 + \sum_{k=1}^0 \frac{(-1)^{0-k}}{k} = I_0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie.

Montrons que P_{n+1} est vraie. D'après 3), on a

$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$. En utilisant P_n , on obtient que

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - \left((-1)^n I_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} I_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n+1-k}}{k} \\ &= (-1)^{n+1} I_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}}{k} \end{aligned}$$

et P_m est vraie.
 ainsi P_m est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

5) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 on a

$$(-1)^n I_0 = I_n - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k}$$

donc
$$I_0 = (-1)^n I_n - \sum_{k=1}^n (-1)^n \frac{(-1)^{n-k}}{k}$$

$$= (-1)^n I_n - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{-k}}{k} \quad (\text{car } (-1)^{2n} = 1)$$

(2)

$$= (-1)^n I_n + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad (\text{car } (-1)^{-k} = (-1)^k)$$

Or $I_0 = \ln(2)$ d'après 1) et $(-1)^n I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 d'après 2). On obtient donc

$$\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

comme voulu.

