

EXERCICE 1

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

puis $A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2a) Pour E , on peut remarquer que $E = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$: c'est bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

Pour F , remarquons déjà que $0 \in F$ car $0 \times A = A \times 0 = 0$.
De plus, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in F$:

$$\text{On a } (\lambda M + M')A = \lambda MA + M'A = \lambda AM + AM' \text{ car } M \text{ et } M' \in F \\ = A(\lambda M + M')$$

Cela montre que $\lambda M + M' \in F$. Donc F est un sev de $M_3(\mathbb{R})$.

2b) Puisque $E = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$, la famille (I_3, A, A^2) engendre E .
Montrons que c'est une famille libre :

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda I_3 + \mu A + \nu A^2 = 0$ (*)

Multiplions par A^2 : comme $A^3 = 0$ et $A^4 = A^3 \times A = 0$, on obtient $\lambda A^2 = 0$.

Comme $A^2 \neq 0$, cela montre que $\lambda = 0$.

Ainsi, (*) devient $\mu A + \nu A^2 = 0$; on multiplie par A : $\mu A^2 = 0$,
d'où $\mu = 0$, puis il reste $\nu A^2 = 0$, donc $\nu = 0$: cqfd.

Donc (I_3, A, A^2) est une base de E , qui est donc de dimension 3.

2c) Puisque $E = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$, il suffit de voir $A^k \in F$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.
C'est vrai, car $A^k A = A^{k+1} = A \cdot A^k$.

Donc $E \subset F$.

3a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } MN = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

D'autre part, $NM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $MN = NM \Leftrightarrow d=0, g=0, e=a, h=d, f=b, i=e, h=0$
 $\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Or, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $MN = NM \Leftrightarrow M = aI_3 + bN + cN^2$.

Cela montre que $F' = \{ aI_3 + bN + cN^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$
 C'est-à-dire $F' = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$

3. b) • Déjà, soit $M \in F$: on a $\varphi(M) \in F'$, c'est-à-dire $\varphi(M)N = N\varphi(M)$.

Or, $\varphi(M)N = P^{-1}MPN =$

$= P^{-1}MP \cancel{P^{-1}A}P \quad \text{car } M \in F$
 $= P^{-1}AMP$
 $= \cancel{P^{-1}A}NP^{-1}MP$
 $= N\varphi(M). \quad \checkmark$

• Montrons que φ est linéaire : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, M' \in F$.

Alors $\varphi(\lambda M + M') = P^{-1}(\lambda M + M')P = \lambda P^{-1}MP + P^{-1}M'P$
 $= \lambda \varphi(M) + \varphi(M') \quad \checkmark$

• Montrons enfin que φ est bijective : on peut remarquer que $P^{-1}MP = \tilde{M} \Leftrightarrow M = P\tilde{M}P^{-1}$. Autrement dit, toute $\tilde{M} \in F'$ admet un unique antécédent par φ , donné par $P\tilde{M}P^{-1} (\in F)$.
 (Autre point de vue : si $\psi : \tilde{M} \in F' \mapsto P\tilde{M}P^{-1}$, alors $\varphi \circ \psi = \text{id}$, $\psi \circ \varphi = \text{id}$.)

Donc φ est un isomorphisme de F sur F' .

4. On sait déjà que $E \subset F$ et que $\dim E = 3$.

D'après 3b, on a $\dim F = \dim F' = \dim \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.

Or, la famille (I_3, N, N^2) est libre car $aI_3 + bN + cN^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a=b=c=0$.

Par conséquent, $\dim F' = 3$, d'où $\dim F = 3$.

Tout cela montre que $E = F$.

EXERCICE 2

1a) Comme $I \subset]0, +\infty[$, on peut déjà remarquer que $\mathcal{E}^- \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = 1$
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y: x \mapsto \lambda e^{2\ln x} = \lambda x^2, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une solution particulière de $\mathcal{E}^-$ est $x \mapsto -x$ (vérification immédiate)

Donc les solutions de $\mathcal{E}^-$ sur I sont les fcts $y: x \in I \mapsto \lambda x^2 - x$,
avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1b) Cette fois, $\mathcal{E}^+ \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = 1$: les solutions de l'éq. homogène
sont les fonctions $y: x \mapsto \lambda e^{-2\ln x} = \frac{\lambda}{x^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$

On peut aussi chercher une solution particulière polynomiale : elle
doit être de degré 1 et sans coeff. constant, $y_0: x \mapsto \alpha x$

$$\text{Alors } y_0'(x) + \frac{2}{x}y_0(x) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \frac{2}{x}\alpha x = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Donc les solutions de $\mathcal{E}^+$ sur I sont les fonctions $y: x \in I \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3}$,
avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2a) Puisque y est solution de $\mathcal{E}$, on a : $\forall x > 0, y'(x) = \frac{2}{x}|y(x)| + 1$,
donc $y'(x) > 0$. Ainsi, y est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2b) Si on avait $y(x) > 0$ pour tout $x > 0$, on aurait $|y(x)| = y(x)$,
donc $\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}^-$ sur $]0, +\infty[$

D'après 1-a), il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0, y(x) = \lambda x^2 - x = x(\lambda x - 1)$
Comme $y(x) > 0$, cela donne $\lambda x - 1 > 0$ pour tout $x > 0$: c'est
absurde car $x \mapsto \lambda x - 1$ est une fonction affine avec $\lim_{x \rightarrow 0} (\lambda x - 1) = -1$.

2c) De même, si on avait $y(x) < 0$ pour tout $x > 0$, on aurait
 $\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}^+$ sur $]0, +\infty[: \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x > 0, y(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x}{3} = \frac{3\lambda + x^3}{3x^2}$

Comme $y(x) < 0$, cela donne $3\lambda + x^3 < 0$ pour tout $x > 0$.
C'est absurde car $3\lambda + x^3 \rightarrow +\infty$ qd $x \rightarrow +\infty$.

2d) D'après a, b et c) et le théorème des valeurs intermédiaires (y est continue sur $]0, +\infty[$), il existe un unique $\alpha > 0$ tel que

- $y(x) < 0$ sur $]0, \alpha[$
- $y(\alpha) = 0$
- $y(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$

On peut donc appliquer 1a) sur $]\alpha, +\infty[$ et 1b) sur $]0, \alpha[$:

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} / \forall x \in]\alpha, +\infty[, y(x) = \lambda_1 x^2 - x$$

$$\exists \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, \alpha[, y(x) = \frac{\lambda_2}{x^2} + \frac{x}{3}$$

Comme y est continue en α et que $y(\alpha) = 0$, on doit avoir

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} y = 0 = \lim_{x \rightarrow \alpha} y(x), \text{ d'où } \begin{cases} \lambda_1 \alpha^2 - \alpha = 0, \text{ c'ad } \lambda_1 = \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\lambda_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{3} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{\alpha} \\ \lambda_2 = -\frac{\alpha^3}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in]0, \alpha[, y(x) = -\frac{\alpha^3}{3x^2} + \frac{x}{3} = \frac{x^3 - \alpha^3}{3x^2}$$

$$\text{et } \forall x \in]\alpha, +\infty[, y(x) = \frac{1}{\alpha} x^2 - x = \frac{x(x - \alpha)}{\alpha}$$

Par continuité en α , ces expressions sont encore vraies pour $x = \alpha$.

Donc :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - \alpha^3}{3x^2} & \text{si } x \in]0, \alpha] \\ \frac{x(x - \alpha)}{\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[\end{cases}$$

3. Supposons que y soit une solution sur $\mathbb{R}$ de $xy' - 2|y| = x$.

Alors $y|_{]0, +\infty[}$ est une solution sur $]0, +\infty[$ de $xy' - 2|y| = x$:

d'après la question précédente, il existe en particulier $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, \alpha], y(x) = \frac{x^3 - \alpha^3}{3x^2}$$

$$\text{Donc } y(x) \sim -\frac{\alpha^3}{3x^2} \text{ et donc } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

C'est absurde car y est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Il n'existe donc pas de solution à $xy' - 2|y| = x$ sur $\mathbb{R}$.