Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Cursus préparatoire — Analyse 2 22 juin 2023

Session 2
Durée : 1h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Question de cours*
Démontrer la proposition suivante : soient I un intervalle, $a : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et A une primitive de a sur I. Les solutions de $(E) : y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

Exercice 2
Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' + 6y' + 25y = 0$. On prendra soin de donner la forme réelle des solutions.

Exercice 3

1. Calculer le développement limité de $f(x) = e^{3x} - e^{2x} - \sin x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Calculer le développement limité de $g(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \dfrac{x}{2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exercice 4
Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{nx}}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5

1. À l'aide du changement de variable $t = \tan x$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. *On rappelle que pour tout* $x \in \mathbf{R}$, *on a* $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{3}$.