**Université Claude Bernard - Lyon 1**
Cursus préparatoire — Analyse 2

Semestre de printemps 2022-2023
22 juin 2023

---

**Session 2**
**Durée : 1h**

---

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.*

**Exercice 1**
Voir le cours.

**Exercice 2**
Considérons l'équation caractéristique $r^2 + 6r + 25 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 36 - 4 \times 25 = -64$, donc ses racines sont

$$\frac{-6 + i\sqrt{64}}{2} = -3 + 4i \quad \textit{et} \quad \frac{-6 - i\sqrt{64}}{2} = -3 - 4i.$$

D'après le cours, les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions $x \mapsto e^{-3x}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$, avec $A, B \in \mathbf{R}$.

**Exercice 3**
1. D'après les formules du cours, on a :

$$\begin{aligned} e^{3x} &= 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2), \\ e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2), \\ \sin x &= x + o(x^2). \end{aligned}$$

On en déduit donc immédiatement que

$$e^{3x} - e^{2x} - \sin x = \frac{5}{2}x^2 + o(x^2).$$

2. De même, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+3x} &= 1 + \frac{3x}{2} - \frac{9x^2}{8} + o(x^2), \\ \sqrt{1+2x} &= 1 + \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} + o(x^2), \end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - x/2 = -\frac{5}{8}x^2 + o(x^2).$$

3. Par conséquent, $f(x) \sim \frac{5}{2}x^2$ et $g(x) \sim -\frac{5}{8}x^2$, de sorte que $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{5x^2/2}{-5x^2/8} = -4$, d'où $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -4$.

**Exercice 4**
1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [0, n]$. Comme $\frac{1}{1 + e^{nx}} \geqslant 0$, on a déjà $u_n \geqslant 0$. Par ailleurs, on a $\frac{1}{1 + e^{nx}} \leqslant \frac{1}{e^{nx}} = e^{-nx}$, d'où

$$u_n \leqslant \int_0^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-n^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \to 0$.

**Exercice 5**

1. Si on pose $t = \tan x$, alors $\mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$. On sait de plus que $1+t^2 = 1+\tan^2 x$ et que $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la formule rappelée dans l'énoncé, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

2. Faisons une intégration par parties avec $u' = x^2$ et $v = \operatorname{Arctan} x$, de sorte que $u = \dfrac{x^3}{3}$ et $v = \dfrac{1}{1+x^2}$ (remarquons que cela est possible car $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $[0, \sqrt{3}]$) :

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x\right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le crochet se calcule comme suit :

$$\left[\frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctan}\sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}\times\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Pour l'intégrale qui est apparue dans l'intégration par parties, on peut remarquer que la division euclidienne de $x^3$ par $1+x^2$ est $x^3 = x(1+x^2) - x$, de sorte que $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln 4 \\ &= \frac{3}{2} - \ln 2.\end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats, il vient

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{3}.$$