Université Claude Bernard - Lyon 1
Cursus préparatoire — Analyse 2

Semestre de printemps 2022-2023
9 mai 2023

Contrôle final
Durée : 1 h 30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Questions de cours*
Démontrer les propositions suivantes :

1. Soient $a \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ et $f, g :]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\} \to \mathbf{R}^*$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g ont même signe au voisinage de a.
2. Soient I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $F : x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exercice 2

1. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$.
2. Déterminer la solution de cette équation différentielle vérifiant $y(1) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 3
On considère la fonction $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \ln(\cos x)}.$$

1. Calculer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. Déterminer l'équation de la tangente T au graphe de f au point d'abscisse 0.
3. Quelle est la position de T par rapport au graphe de f au voisinage de 0 ? Faire une figure pour illustrer votre réponse.

Exercice 4
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = 1 - \ln\frac{3}{2}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (x^2+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$.

Exercice 5
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. On rappelle que $\ln(1+y) \leqslant y$ pour tout $y \geqslant 0$.

1. Montrer que $u_n = o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.
2. En déduire que $v_n = \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.