Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire — Analyse 2 9 mai 2023

Contrôle final
Corrigé

Exercice 1 Voir cours.

Exercice 2
1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \ln(1+x^2)$, donc les solutions de cette équation homogène sont les fonctions

$$y : x \mapsto \lambda e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{\lambda}{1+x^2},$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons maintenant une solution de l'équation complète sous la forme $y : x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{1+x^2}$. On a alors

$$y'(x) = \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \lambda(x)\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}y(x),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R},\ y'(x) + \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} &\iff \forall x \in \mathbf{R},\ \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}y(x) + \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} \\
&\iff \forall x \in \mathbf{R},\ \frac{\lambda'(x)}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} \\
&\iff \forall x \in \mathbf{R},\ \lambda'(x) = \frac{2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir $\lambda(x) = 2\operatorname{Arctan} x$. Une solution particulière de l'équation complète est donc $x \mapsto 2\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}$, de sorte que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions

$$y : x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2} + 2\frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2},$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Soit y une solution de paramètre λ. Alors

$$y(1) = \frac{3\pi}{4} \iff \frac{\lambda}{1+1^2} + 2\frac{\operatorname{Arctan} 1}{1+1^2} = \frac{3\pi}{4} \iff \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \iff \lambda = \pi.$$

Ainsi, la solution vérifiant $y(1) = \dfrac{3\pi}{4}$ est la fonction définie par

$$y : x \mapsto \frac{\pi}{1+x^2} + 2\frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}.$$

Exercice 3
1. Commençons par écrire le développement limité du dénominateur à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+\ln(\cos x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

On multiplie par $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$:

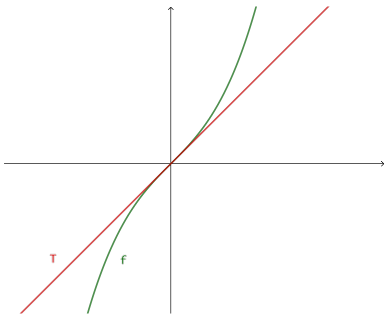
$$\frac{\operatorname{sh} x}{1+\ln(\cos x)} = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

d'où finalement

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. D'après le cours, on sait que l'équation de T est donnée par la partie affine du développement limité de f en 0. Ici, l'équation de T est donc $y = x$.

3. Au voisinage de 0, la position du graphe de f par rapport à T est donnée par le signe de $f(x) - x$. Or, d'après la question 1, on a $f(x) - x = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim \frac{2}{3}x^3$. Par conséquent, $f(x) - x$ est du signe de $\frac{2}{3}x^3$ au voisinage de 0, c'est-à-dire positif si $x > 0$ et négatif si $x < 0$. Donc, au voisinage de 0, le graphe de f est au dessus de T pour les $x > 0$ et en dessous de T pour les $x < 0$.



Exercice 4

1. Faisons le changement de variable $u = e^x$, c'est-à-dire $x = \ln u$. On a $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{u^2}{u+1}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \int_1^2 \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^2 \frac{u+1-1}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= [u - \ln(u+1)]_1^2 \\
&= 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 \\
&= 1 + \ln\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

2. Faisons une première intégration par parties avec $u' = \cos 2x$ et $v = x^2 + 1$, d'où $u = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ et $v' = 2x$ (remarquer que u et v sont C^1 sur $[0, \pi/4]$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} (x^2+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2+1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} + 1\right) - \int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale qui est apparue, on fait aussi une intégration par parties, cette fois avec $u' = \sin 2x$ et $v = x$, d'où $u = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ et $v' = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} x\sin 2x \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

En remettant cela dans l'égalité issue de la première intégration par parties, on obtient finalement

$$\int_0^{\pi/4} (x^2+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}.$$

Exercice 5

1. Montrer que $u_n = o(1)$ revient à montrer que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\ln(1+x^n) \geqslant 0$ car $x^n \geqslant 0$, et $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$ d'après le résultat rappelé dans l'énoncé. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n.$$

On intègre sur $[0,1]$:

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, le théorème d'encadrement nous donne bien $u_n \to 0$.

2. Soit $n \geqslant 1$. Faisons une intégration par parties avec $u' = \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et $v = x$, d'où $u = \dfrac{1}{n}\ln(1+x^n)$ et $v' = 1$ (on peut remarquer que u et v sont bien de classe C^1 sur $[0,1]$) :

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n}\cdot x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{n}\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{u_n}{n}.$$

Or, comme $u_n = o(1)$, on a $\dfrac{u_n}{n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et donc

$$v_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$