Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Cursus préparatoire — Algèbre 2 — 27 juin 2023

Session 2
Durée : 1 h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Question de cours*
Démontrer la proposition suivante : soient E un espace vectoriel sur K et F, G deux sous-espaces de E. Alors la somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exercice 2
Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{3X^2-4X+8}{X^2(X^2+4)}$.

Exercice 3

1. Rappeler l'énoncé de la formule du binôme pour deux matrices A, $B \in M_3(\mathbf{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4
Étant donnés a, b deux réels distincts, on définit $P_0 = (X-a)^3$, $P_1 = (X-a)^2(X-b)$, $P_2 = (X-a)(X-b)^2$ et $P_3 = (X-b)^3$. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

Exercice 5
Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ par :

$$u(x,y,z) = (x+y+2z, x+z, 2x-y+z).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Donner la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
3. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Montrer que $(a,b,c) \in \operatorname{Im} u$ si et seulement si $a - 3b + c = 0$.
4. Soit $F = \operatorname{Vect}((2,3,5))$. Montrer que F et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
5. L'application u est-elle bijective ?