Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire — Algèbre 2 — 27 juin 2023

Session 2
Durée : 1 h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 Voir cours.

Exercice 2
On remarque que $\deg F < 0$, donc la partie entière dans la décomposition en éléments simples de F est nulle. Il existe donc $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{3X^2 - 4X + 8}{X^2(X^2+4)} = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{cX+d}{X^2+4} \quad (*).$$

Pour déterminer a, on multiplie $(*)$ par X^2 puis on évalue en $X = 0$, ce qui donne $a = \dfrac{8}{4} = 2$.
Pour déterminer c et d, on multiplie $(*)$ par $X^2 + 4$ puis on évalue en $X = 2i$, ce qui donne

$$\frac{3(2i)^2 - 4(2i) + 8}{(2i)^2} = 2ic + d, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 + 2i = d + 2ci.$$

On en déduit donc que $c = 1$ et $d = 1$.
On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{x+1}{x^2+4}$. Multiplions cette dernière égalité par x puis faisons $x \to +\infty$: cela donne $0 = b + 1$, d'où $b = -1$.
La décomposition en éléments simples de F est donc

$$F(X) = \frac{2}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{X+1}{X^2+4}.$$

Exercice 3
1. Si $AB = BA$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

2. Écrivons $M = A + B$ avec $A = 3I_3$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On sait déjà que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k = 3^k I_3$.
De plus, en calculant B^2 puis B^3 on voit que l'on a

$$B^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

pour tout $k \geqslant 1$. Puisque $AB = BA$, on peut appliquer la formule du binôme :

$$M^n = (A+B)^n = 3^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}.$$

Le premier coefficient diagonal de cette somme est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(-1)^k = (3-1)^n = 2^n$. De même, le deuxième coefficient diagonal est égal à $(3+0)^n = 3^n$ et le troisième est égal à $(3-2)^n = 1$. Enfin, le dernier coefficient à calculer est

$$3^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(-2)^{k-1} = 3^n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(-2)^k = 3^n + \frac{1}{2}((3-2)^n - 3^n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

On obtient donc finalement $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & \frac{3^n-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Remarquons que les P_i sont bien des éléments de $\mathbf{R}_3[X]$. De plus, comme $\operatorname{Card} \mathscr{B} = 4 = \dim \mathbf{R}_3[X]$, il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, et montrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a :

$$\lambda_0 (X-a)^3 + \lambda_1 (X-a)^2 (X-b) + \lambda_2 (X-a)(X-b)^2 + \lambda_3 (X-b)^3 = 0 \quad (*).$$

Si on évalue cette égalité en $X = a$, il vient $\lambda_3 (a-b)^3 = 0$, d'où $\lambda_3 = 0$, puisque $a \neq b$. De même, si on évalue en $X = b$, on obtient $\lambda_0 = 0$. L'égalité $(*)$ devient donc

$$\lambda_1 (X-a)^2 (X-b) + \lambda_2 (X-a)(X-b)^2 = 0 \quad (*),$$

et on peut simplifier par $(X-a)(X-b)$:

$$\lambda_1 (X-a) + \lambda_2 (X-b) = 0.$$

On évalue à nouveau en $X = a$, ce qui donne $\lambda_2 = 0$, et en $X = b$, ce qui donne $\lambda_1 = 0$. Cqfd.

Exercice 5

1. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$, $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$. Alors $\lambda X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$, donc

$$\begin{aligned} u(\lambda X + X') &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' + 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda z + z', 2(\lambda x + x' - (\lambda y + y') + \lambda z + z') \\ &= (\lambda(x + y + 2z) + (x' + y' + 2z'), \lambda(x + z) + (x' + z'), \lambda(2x - y + z) + (2x' - y' + z')) \\ &= \lambda(x + y + 2z, x + z, 2x - y + z) + (x' + y' + 2z', x' + z', 2x' - y' + z') \\ &= \lambda u(X) + u(X'). \end{aligned}$$

Cela montre que u est linéaire.

2. On a directement $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Par définition de l'image de u, on sait que $(a, b, c) \in \operatorname{Im} u$ si et seulement si il existe $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $(a, b, c) = u(x, y, z)$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} (a, b, c) \in \operatorname{Im} u &\iff \exists (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } \ M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \text{le système } \quad (S_{a,b,c}) : M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{possède une solution.} \end{aligned}$$

Pour voir à quelle condition le système $(S_{a,b,c})$ possède une solution, échelonnons en lignes la matrice augmentée correspondant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -3 & -3 & c-2a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a-3b+c \end{array}\right).$$

On sait alors que $(S_{a,b,c})$ possède une solution si et seulement si $a - 3b + c = 0$. On a donc bien démontré que $(a, b, c) \in \operatorname{Im} u$ si et seulement si $a - 3b + c = 0$.

4. La question précédente montre que $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace défini par une équation linéaire non triviale, donc que $\dim \operatorname{Im} u = 2$. Comme $\dim F = 1$, on a $\dim F + \dim \operatorname{Im} u = 3 = \dim \mathbf{R}^3$, et il suffit donc de montrer que $F \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Or, soit $(x, y, z) \in F \cap \operatorname{Im} u$. Par définition de F, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(x, y, z) = (2\lambda, 3\lambda, 5\lambda)$. D'après la question précédente, on a alors $2\lambda - 3 \times 3\lambda + 5\lambda = 0$, d'où l'on déduit $\lambda = 0$. Cela montre que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ce qu'il fallait démontrer.

On a donc bien $\mathbf{R}^3 = F \oplus \operatorname{Im} u$.

5. Puisque $\operatorname{rg} u = 2 < 3$, l'application u n'est pas surjective. Elle n'est donc pas bijective.