Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire — Algèbre 2 10 mai 2023

Contrôle final
Durée : 1 h 30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 *Questions de cours*
Démontrer les propositions suivantes :

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Soient E, F deux espaces vectoriels sur K, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et F' un sous-espace vectoriel de F. Alors $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2
Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{7X^2 + 4X - 4}{X^4 - 4X^2}$.

Exercice 3
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 5A - 6I_2$.
2. (a) À l'aide de la question 1, montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_2.
   (b) Retrouver l'inversibilité de A et l'expression de A^{-1} d'une autre manière.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ telles que $A^n = a_n A + b_n I_2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Montrer $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. *On ne cherchera pas à calculer explicitement a_n.*

Exercice 4
On considère les ensembles $E = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(X^2) = X^2 P(X)\}$ et $F = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid P(0) = P(2)\}$. On admet que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\dim E = 1$ et que $\dim F = 2$. *Indication : poser $P(X) = aX^2 + bX + c$ et trouver des conditions sur a, b, c pour que $P \in E$ et $P \in F$.*
2. En déduire que $\mathbf{R}_2[X] = E \oplus F$.

Exercice 5
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ par

$$u(x, y, z) = (3x + 2y - z, -2x + 2z, x + 2y + z).$$

1. Écrire la matrice A de u dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$.
2. *Pour les questions 2.(a) et 2.(b), vous pouvez les traiter dans l'ordre 2.(a) puis 2.(b), ou dans l'ordre 2.(b) puis 2.(a). Faites dans tous les cas attention à la cohérence de l'enchaînement de vos arguments.*
   (a) Montrer que u est de rang 2.
   (b) On pose $\varepsilon_1 = (1, -1, 1)$. Montrer que (ε_1) est une base de $\ker u$.
   (c) L'application u est-elle injective ? surjective ?
3. On pose maintenant $\varepsilon_2 = (1, 0, 1)$ et $\varepsilon_3 = (-1, 1, 0)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   (c) Calculer $u(\varepsilon_2)$ et $u(\varepsilon_3) - 2\varepsilon_3$.
   (d) Sans calculer P^{-1}, expliciter la matrice $P^{-1}AP$.