Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire — Algèbre 2 10 mai 2023

Contrôle final
Corrigé

Exercice 1 Voir cours.

Exercice 2
Remarquons déjà que $\deg F < 0$, de sorte que la partie entière dans la décomposition en éléments simples de F est nulle. La factorisation du dénominateur de F en produit d'irréductibles est $X^2(X-2)(X+2)$. En particulier, cela permet de voir que F est écrite sous forme irréductible (car 0, 2 et -2 ne sont pas racines du numérateur) ; il existe donc des réels a, b, c, d tels que

$$F(X) = \frac{7X^2+4X-4}{X^2(X-2)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-2} + \frac{d}{X+2}.$$

Pour calculer b, on multiplie cette égalité par X^2 puis on évalue en $X=0$, ce qui donne $b = \dfrac{-4}{-2\times 2} = 1$. De même, on trouve $c = 2$ et $d = -1$. On a donc, pour tout $x \in]2, +\infty[$:

$$\frac{7x^2+4x-4}{x^2(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2}.$$

Multiplions par x :

$$\frac{7x^2+4x-4}{x(x-2)(x+2)} = a + \frac{1}{x} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+2}.$$

Faisons maintenant $x \to +\infty$: compte tenu des équivalents usuels, on a

$$0 = a + 0 + 2 - 1,$$

d'où $a = -1$. Ainsi, la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbf{R}$ est

$$F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X+2}.$$

Exercice 3
1. On calcule simplement $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$, et $5A - 6I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$. On a donc bien $A^2 = 5A - 6I_2$.

2. (a) Par conséquent, on a $A^2 - 5A = -6I_2$, d'où $\dfrac{-1}{6}(A-5I_2)\cdot A = I_2$ et $A \cdot \dfrac{-1}{6}(A - 5I_2) = I_2$. Cela montre que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{-1}{6}(A-5I_2)$.

2. (b) On peut par exemple appliquer l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right).$$

Donc A est inversible $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Or $A - 5I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et on retrouve donc bien $A^{-1} = \dfrac{-1}{6}(A - 5I_2)$.

3. Montrons par récurrence que la propriété $P(n)$: « il existe a_n, $b_n \in \mathbf{R}$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$ ».

- Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_2 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_2$. La propriété $P(0)$ est donc vraie, avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

• Soit $n \in \mathbf{N}$ et supposons que $P(n)$ soit vraie. Alors

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A.$$

D'après la question 1, on en déduit que

$$A^{n+1} = a_n(5A - 6I_2) + b_n A = (5a_n + b_n)A - 6a_n I_2.$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie, avec $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -6a_n$.

• Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4. On a alors $a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1} = 5a_{n+1} - 6a_n$ d'après la question précédente.

Exercice 4

1. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$. On a d'une part $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$, de sorte que

$$\begin{aligned}
P \in E &\iff X^2(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^2 + c \\
&\iff aX^4 + bX^3 + cX^2 = aX^4 + bX^2 + c \\
&\iff \begin{cases} b = 0 \\ c = b \\ c = 0 \end{cases} \\
&\iff P = aX^2 \\
&\iff P \in \mathrm{Vect}(X^2).
\end{aligned}$$

Donc $E = \mathrm{Vect}(X^2)$, et donc (puisque $X^2 \neq 0$) $\dim E = 1$.

D'autre part, de nouveau avec $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a $P(0) = c$ et $P(2) = 4a + 2b + c$, donc

$$\begin{aligned}
P \in F &\iff c = 4a + 2b + c \\
&\iff 2a + b = 0 \\
&\iff P = aX^2 - 2aX + c \\
&\iff P = a(X^2 - 2X) + c \\
&\iff P \in \mathrm{Vect}(X^2 - 2X, 1).
\end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}(X^2 - 2X, 1)$, ce qui signifie que la famille $(X^2 - 2X, 1)$ engendre F. C'est aussi une famille libre car elle est formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F, d'où $\dim F = 2$.

2. On a déjà $\dim E + \dim F = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbf{R}_2[X]$. Il reste par exemple à montrer que $E \cap F = \{0\}$. Or, si $P \in E \cap F$, on a $P(X^2) = X^2 P(X)$, ce qui donne, avec $X = 0$: $P(0) = 0$. Comme $P \in F$, on a alors $P(2) = 0$. Mais alors $P(4) = 2^2 P(2) = 0$. Le polynôme P a ainsi 3 racines distinctes alors qu'il est de degré $\leqslant 2$: c'est que $P = 0$. On a donc montré que $\mathbf{R}_2[X] = E \oplus F$.

Exercice 5

1. Par définition même, on a immédiatement $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) On échelonne A en colonnes :

$$A \underset{C_3 \leftrightarrow C_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice échelonnée possède deux colonnes non nulles, donc $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, u = 2$.

2. (b) Remarquons que $u(\varepsilon_1) = 0$, donc $\varepsilon_1 \in \ker u$. Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim \ker u = \dim \mathbf{R}^3 - \mathrm{rg}\, u = 1$; une base de $\ker u$ est donc formée de tout vecteur non nul de $\ker u$. C'est le cas de ε_1, donc (ε_1) est une base de $\ker u$.

2. (c) On a $\ker u \neq \{0\}$ donc u n'est pas injective. Par ailleurs, puisque $\mathrm{rg}\, u < 3$, l'application u n'est pas surjective.

3. (a) Montrons que $\mathscr{B}'$ est une famille libre : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha \qquad + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta \qquad = 0. \end{cases}$$

Les deux dernière équations donnent $\beta = -\alpha$ et $\gamma = \alpha$: en reportant dans la première équation, cela donne $\alpha = 0$, d'où $\beta = \gamma = 0$ aussi. La famille $\mathscr{B}'$ est donc libre.

Or, comme $\operatorname{Card} \mathscr{B}' = 3 = \dim \mathbf{R}^3$, cela montre que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

3. (b) Par définition même de P, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (c) On calcule : $u(\varepsilon_2) = (2, 0, 2) = 2\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) - 2\varepsilon_3 = (1, 0, 1) = \varepsilon_2$.

3. (d) D'après le cours, on sait que $P^{-1}AP$ est la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$. Or, d'après les questions précédentes, on a $u(\varepsilon_1) = 0$, $u(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \epsilon_2 + 2\varepsilon_3$. Par conséquent, on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$