
Devoir CUPGE n° 4
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice 1 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^3 = 0$.
2. Soient $E = \{aI_3 + bA + cA^2 \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$ et $F = \{M \in M_3(\mathbf{R}) \mid MA = AM\}$.
   (a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $M_3(\mathbf{R})$.
   (b) Calculer la dimension de E.
   (c) Montrer que $E \subset F$.
3. Soit $F' = \{M \in M_3(\mathbf{R}) \mid MN = NM\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbf{R})$.
   (a) Montrer que $F' = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   (b) On admet qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = PNP^{-1}$. Montrer que l'application

   $$\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F' \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

   est un isomorphisme de F sur F'. *En particulier, on n'oubliera pas de montrer que si $M \in F$, alors $\varphi(M) \in F'$.*
4. Montrer que $E = F$.

Exercice 2

1. Soit I un intervalle quelconque inclus dans $]0, +\infty[$.
   (a) Résoudre $\mathscr{E}^- : xy' - 2y = x$ sur I.
   (b) Résoudre $\mathscr{E}^+ : xy' + 2y = x$ sur I.
2. On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle $\mathscr{E} : xy' - 2|y| = x$, que l'on va résoudre sur $]0, +\infty[$. On considère donc une solution y définie sur $]0, +\infty[$.
   (a) Montrer que y est strictement croissante.
   (b) En utilisant la question 1. (a), montrer qu'on ne peut pas avoir $y(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   (c) De même, montrer qu'on ne peut pas avoir $y(x) < 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   (d) En déduire qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que

   $$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x^2} & \text{si } x \in]0, \alpha] \\ \dfrac{x(x-\alpha)}{\alpha} & \text{si } x \in [\alpha, +\infty[. \end{cases}$$

   On admet que, réciproquement, pour tout $\alpha > 0$, la fonction y ainsi définie est solution de $\mathscr{E}$ sur $]0, +\infty[$.
3. L'équation différentielle $xy' - 2|y| = x$ possède-t-elle des solutions sur $\mathbf{R}$?