Université Claude Bernard - Lyon 1
Cursus préparatoire — Algèbre 2 et Analyse 2

Semestre de printemps 2022-2023
5 avril 2023

Devoir CUPGE n° 3
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice

On considère $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0\big\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de F.
3. Soit $G = \mathrm{Vect}((3, -1, -2, -2), (1, 3, -1, 2))$. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Problème

On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. (a) Calculer a_1.
   (b) À l'aide du changement de variable $x = \mathrm{sh}\,u$, montrer que $a_0 = \ln(1+\sqrt{2})$. *On rappelle que la fonction* Argsh*, réciproque de* sh *sur* $\mathbf{R}$*, est donnée par* $\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}$*.*
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
3. (a) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+2)a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)a_n$.
   Indication : pensez à ce qui a été fait en TD pour démontrer ce genre de relation. Ici, il faut commencer de la même manière mais il y a encore quelque chose à effectuer ensuite...
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(2n+3)a_{n+2} \leqslant \sqrt{2}$.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n$.
4. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.
   (a) Soit $b_n = (n+1)a_n a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ et vérifier que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(b_k + b_{k+1}) = a_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   (c) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$ quand $n \to +\infty$, puis montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$