Université Lyon 1

UNIVERSITE LYON 1

Année universitaire : /

Diplôme :

Epreuve :

Date :

Nom (de jeune fille pour les femmes mariées) et prénoms.

Numéro de la carte d'étudiant :

Signature :

NOTE :

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0653059 Nombre d'intercalaires :

PROBLÈME

1.a) On a tout de suite $a_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \underline{\sqrt{2}-1}$.

b) Avec le changement de variable $x = \text{sh}\,u$, on a $dx = \text{ch}\,u\,du$, d'où $a_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\text{Argsh}\,1} \frac{\text{ch}\,u\,du}{\sqrt{1+\text{sh}^2 u}}$

Or, $\text{Argsh}\,1 = \ln(1+\sqrt{1^2+1}) = \ln(1+\sqrt{2})$ et on sait que $\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$ d'où $\sqrt{1+\text{sh}^2 u} = \sqrt{\text{ch}^2 u} = \text{ch}\,u$ (car $\text{ch}\,u > 0$ pour tout u)

Ainsi, $a_0 = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} du$, c'est-à-dire $\boxed{a_0 = \ln(1+\sqrt{2})}$

2 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$, d'où

$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^n}{1}$$

Par conséquent, $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$.

Comme $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, il vient $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}}$.

2b) Par théorème d'encadrement, le résultat précédent montre immédiatement que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, et que $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

3a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in[0,1]$, on a $x^{n+1}\le x^n$, d'où

$$\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$$

En intégrant sur $[0,1]$, cela montre que $a_{n+1}\le a_n$.
La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante.

3b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Écrivons $a_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Posons $u'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $v(x)=x^{n+1}$; d'où $u(x)=\sqrt{1+x^2}$ et $v'(x)=(n+1)x^n$.
u et v sont C^1 sur le segment $[0,1]$, donc par intégration par parties, on a :

$$a_{n+2} = \underbrace{\left[x^{n+1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1}_{=\sqrt{2}} - (n+1)\int_0^1 \underbrace{x^n\sqrt{1+x^2}}_{\frac{x^n(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}}}\,dx$$

d'où $$a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)\left(a_n + a_{n+2}\right).$$

Par conséquent, $\boxed{(n+2)\,a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)\,a_n}$

3c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de a, on sait que $a_n \geq a_{n+2}$.

Ainsi, $(n+2)a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)a_n \leq \sqrt{2} - (n+1)a_{n+2}$,

donc $(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+2} \leq \sqrt{2}$, càd $\boxed{(2n+3)\,a_{n+2} \leq \sqrt{2}}$

3d) Remplaçons n par $n-2$ dans ce qui précède : $(2n-1)\,a_n \leq \sqrt{2}$ pour $n \geq 2$.

$$a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$$

Avec 2.a), cela donne $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq a_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2n-1}$,

$$\text{donc} \quad \underbrace{\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq n a_n \leq \underbrace{\sqrt{2}\,\frac{n}{2n-1}}_{\sim \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n\to\infty} n a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

4a) On a $b_n = \underbrace{(n+1)a_{n+1}}_{\substack{\to \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{d'après 3 d)}}} \times \underbrace{a_n}_{\substack{\to 0 \\ \text{d'après 2b}}}$, donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = 0}$

De plus, si $k \in \mathbb{N}$, on a $b_k + b_{k+1} = (k+1)a_k a_{k+1} + (k+2)a_{k+1}a_{k+2}$

$$= a_{k+1}\Big(\underbrace{(k+1)a_k + (k+2)a_{k+2}}_{=\sqrt{2} \text{ d'après 3b)}}\Big)$$

donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(b_k + b_{k+1}) = a_{k+1}}$

4b) On a : $S_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1} + (-1)^n a_n$.

$$= a_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}(b_0 + \cancel{b_1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cancel{b_1} + \cancel{b_2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cancel{b_2} + \cancel{b_3}) + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2}}(\cancel{b_{n-2}} + \cancel{b_{n-1}})$$

$$+ \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}(\cancel{b_{n-1}} + b_n)$$

$$= a_0 - \frac{b_0}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} b_n.$$

Or $\left|\dfrac{(-1)^n b_n}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{|b_n|}{\sqrt{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'après 4a), donc $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}} b_n \to 0$.

Ainsi, (S_n) admet une limite finie en $+\infty$, à savoir $a_0 - \dfrac{b_0}{\sqrt{2}}$.

Or $a_0 - \frac{b_0}{\sqrt{2}} = a_0 - \frac{a_0 a_1}{\sqrt{2}} = a_0\left(1 - \frac{a_1}{\sqrt{2}}\right) = \ln(1+\sqrt{2})\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\right)$

$= \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}}$

4c) On a $\left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x)}\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+0^2}\,(1+0)}\,dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$

Comme $\frac{1}{n+2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, on a bien $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Maintenant, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-x)^k}_{\text{car } -x \neq 1 \ \rightarrow\ = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}}\right)dx$

donc $S_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Or $\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ainsi, $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \lim_{n\to\infty} S_n$, càd $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}}$

EXERCICE

1. • On a déjà $\vec{0}_{\mathbb{R}^4} \in F$.

• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{X} = (x,y,z,t)$ et $\vec{X'}$ $(x',y',z',t') \in F$. Mq $\lambda\vec{X} + \vec{X'} \in F$.

$\lambda\vec{X} + \vec{X'} = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$

et $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') - \lambda(t+t')$

$= \lambda(\underbrace{x+y+2z-t}_{=0 \text{ car } \vec{X} \in F}) + (\underbrace{x'+y'+2z'-t'}_{=0 \text{ car } \vec{X'} \in F}) = 0$, donc $\lambda\vec{X} + \vec{X'} \in F$

Cela montre que F est un sev de $\mathbb{R}^4$.

2. On a $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = x+y+2z\} = \{(x,y,z,x+y+2z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

On en déduit que $F = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(1,0,0,1)}_{\vec{e_1}}, \underbrace{(0,1,0,1)}_{\vec{e_2}}, \underbrace{(0,0,1,2)}_{\vec{e_3}}\right)$.

Autrement dit, $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une famille génératrice de F. C'est une famille libre car si $\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3} = \vec{0}$ on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. C'est donc une base de F.

3. On peut remarquer que $(3,-1,-2,-2) \in F$ car $3 - 1 + 2(-2) - (-2) = 0$

$(1,3,-1,2) \in F$ car $1 + 3 - 2 - 2 = 0$.

Donc $G \subset F$. Ainsi $F \cup G = F$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.