Devoir CUPGE n° 2
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Problème

On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est *pseudo-inversible* s'il existe $B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\begin{cases} AB &= BA \quad \text{(i)} \\ ABA &= A \quad \text{(ii)} \\ BAB &= B. \quad \text{(iii)} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que B est une pseudo-inverse de A. On admet, dans les questions 1 et 2, que si une matrice A est pseudo-inversible, alors elle a une unique pseudo-inverse, notée A^*.

1. (a) Montrer que la matrice nulle de $M_n(\mathbf{R})$ est pseudo-inversible, et déterminer sa pseudo-inverse.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est pseudo-inversible et que $M^* = M$.
   (c) Montrer que toute matrice inversible $A \in M_n(\mathbf{R})$ est pseudo-inversible, et déterminer sa pseudo-inverse. Que dire de la réciproque ?
   (d) Soit $N \in M_n(\mathbf{R})$ pseudo-inversible. On suppose que N est nilpotente, c'est-à-dire qu'on suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $N^{p-1} \neq 0$ et $N^p = 0$.
      i. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $N^* N^k = N^{k-1}$.
      ii. En déduire que $N = 0$, c'est-à-dire que $p = 1$.
      iii. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle pseudo-inversible ?
2. Soient $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que D est pseudo-inversible et déterminer sa pseudo-inverse.
   (b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Vérifier ensuite que $A = PDP^{-1}$.
   (c) En déduire que A est pseudo-inversible et calculer sa pseudo-inverse.
3. **Unicité des pseudo-inverses.** Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ pseudo-inversible, et soient B_1, B_2 deux pseudo-inverses de A.
   (a) En calculant AB_1AB_2 de deux manières différentes, montrer que $AB_1 = AB_2$.
   (b) En déduire que $B_1 = B_2$.

Exercice

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme ayant une racine $a \in \mathbf{C}$ de multiplicité $m \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que cela signifie qu'il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^m Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.
   En commençant par calculer $\dfrac{P'}{P}$, montrer que a est un pôle simple de $\dfrac{P'}{P}$ et déterminer le coefficient de $\dfrac{1}{X-a}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
2. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
3. Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P.