Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire — Algèbre 2 et analyse 2 16 mars 2023

Devoir CUPGE n° 2
Corrigé

Problème

1. (a) On remarque que $0_n \times 0_n = 0_n \times 0_n$, et que $0_n \times 0 \times_n 0 = 0$ et $0 \times_n 0 \times 0_n = 0$. Ainsi les propriétés (i), (ii) et (iii) sont satisfaites avec $A = B = 0_n$: cela montre que la matrice 0_n est pseudo-inversible et que $0_n^* = 0_n$.

1. (b) On a déjà $MM = MM$, ce qui donne la condition (i). Ensuite, on calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M$. Par conséquent, $MMM = M^2M = MM = M^2 = M$, ce qui montre que (ii) et (iii) sont vraies avec $A = B = M$. Ainsi, M est pseudo-inversible et $M^* = M$.

1. (c) Si A est inversible, puisque $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, on a $AA^{-1} = A^{-1}A$; $AA^{-1}A = A$; et $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$. Autrement dit, les propriétés (i), (ii) et (iii) sont vraies avec $B = A^{-1}$. Cela montre que A est pseudo-inversible et que $A^* = A^{-1}$.

Les exemples des questions (a) et (b) montrent qu'il existe des matrices qui sont à la fois pseudo-inversibles et non inversibles : on sait d'après le cours que 0_n n'est pas inversible et M ne l'est pas non plus car elle comporte une ligne entière de zéros.

1. (d) i. Faisons-le par récurrence sur $k \geqslant 2$.

- D'après la propriété (ii), on a $NN^*N = N$. Or, d'après (i), on a $NN^* = N^*N$, donc $N^*NN = N$, c'est-à-dire $N^*N^2 = N^{2-1}$. C'est la propriété cherchée, pour $k = 2$.
- Soit $k \geqslant 2$ et supposons que $N^*N^k = N^{k-1}$. Alors $N^*N^{k+1} = N^*N^kN = N^{k-1}N$ par hypothèse de récurrence. On a donc bien $N^*N^{k+1} = N^k$.
- Conclusion : on a $N^*N^k = N^{k-1}$ pour tout $k \geqslant 2$.

1. (d) ii. Si on avait $p \geqslant 2$, la formule précédente, appliquée avec $k = p$, donnerait $N^*N^p = N^{p-1}$. Comme $N^p = 0$, on aurait donc $N^{p-1} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, $p = 1$, ce qui signifie que $N = 0$.

1. (d) iii. On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est donc nilpotente et non nulle : d'après la question précédente, elle est nécessairement non pseudo-inversible.

2. (a) Cherchons $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $BD = DB$, $DBD = D$ et $BDB = B$. Déjà, on a

$$\begin{aligned} DB = BD &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2d & 2e & 2f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 4c \\ 0 & 2e & 4f \\ 0 & 2h & 4i \end{pmatrix} \\ &\iff b = c = d = f = g = h = 0. \end{aligned}$$

On peut donc chercher B sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. Alors

$$DBD = D \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4e & 0 \\ 0 & 0 & 16i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \iff e = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad i = \frac{1}{4},$$

d'où $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Enfin,

$$BDB = B \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \iff a = 0.$$

Tout cela montre que D est pseudo-inversible et que $D^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

2. (b) Avec l'algorithme de Gauss, on voit rapidement que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite par le calcul que $A = PDP^{-1}$.

2. (c) On va montrer que $A' = PD^*P^{-1}$ est la pseudo-inverse de $A = PDP^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} AA' = (PDP^{-1})(PD^*P^{-1}) &= PDP^{-1}PD^*P^{-1} && \text{par associativité du produit matriciel} \\ &= PDD^*P^{-1} && \text{car } P^{-1}P = I \\ &= PD^*DP^{-1} && \text{d'après la propriété (i) pour } D \text{ et } D^* \\ &= (PD^*P^{-1})(PDP^{-1}) && \text{comme précédemment} \\ &= A'A \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété (i) est vraie avec pour A et A'.

On fait de même pour (ii) et (iii). Par exemple,

$$AA'A = (PDP^{-1})(PD^*P^{-1})(PDP^{-1}) = PDD^*DP^{-1} = PDP^{-1} = A,$$

ce qui montre (ii).

Ainsi, A est pseudo-inversible et $A^* = PD^*P^{-1}$.

3. (a) D'une part, on a $AB_1AB_2 = (AB_1A)B_2 = AB_2$ d'après la propriété (ii) entre A et B_1. D'autre part,

$$\begin{aligned} AB_1AB_2 = (AB_1)(AB_2) &= B_1AB_2A && \text{d'après la propriété (i)} \\ &= B_1(AB_2A) \\ &= B_1A && \text{d'après la propriété (ii)} \\ &= AB_1 && \text{d'après la propriété (i)} \end{aligned}$$

On a donc bien $AB_1 = AB_2$.

3. (b) Multiplions l'égalité précédente à gauche par B_1 : cela donne $B_1AB_1 = B_1AB_2$, d'où $B_1 = B_1AB_2$ $(*)$.

Par ailleurs, on a $AB_1 = B_1A$ et $AB_2 = B_2A$, donc, vu l'égalité obtenue en 3. (a), $B_1A = B_2A$. On multiplie cette dernière égalité à droite par B_2, ce qui donne $B_1AB_2 = B_2AB_2 = B_2$ $(**)$.

En comparant $(*)$ et $(**)$, on obtient bien $B_1 = B_2$.

Exercice

1. Puisque $P(X) = (X-a)^m Q(X)$, on a $P'(X) = m(X-a)^{m-1}Q(X) + (X-a)^m Q'(X)$. Par conséquent,

$$\frac{P'}{P} = \frac{m(X-a)^{m-1}Q(X) + (X-a)^m Q'(X)}{(X-a)^m Q(X)} = \frac{m}{X-a} + \frac{Q'(X)}{Q(X)}.$$

Puisque $Q(a) \neq 0$, la fraction Q'/Q n'a pas de pôle en a. Cela montre que a est un pôle simple de P'/P et que le coefficient de $\dfrac{1}{X-a}$ dans sa décomposition en éléments simples est m.

2. De façon générale, si $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme non constant, on sait qu'on peut l'écrire sous la forme

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{m_1}(X - a_2)^{m_2} \dots (X - a_r)^{m_r},$$

où $\lambda \in \mathbf{C}^*$, les a_i sont des nombres complexes distincts et les m_i des entiers $\geqslant 1$.

Vu cette forme de P, les seuls pôles éventuels de P'/P sont $a_1, \dots, a_r$. Plus précisément, la question précédente montre que chaque a_i est un pôle simple, et que le coefficient associé à $\dfrac{1}{X - a_i}$ dans la décomposition en éléments simples est m_i. Comme, de plus, $\deg P' < \deg P$, la partie entière dans cette décomposition est nulle ; elle s'écrit donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - a_i}.$$

3. Remarquons déjà que si P est constant, $P' = 0$ et donc P' ne divise pas P.

Si maintenant P est non constant et si P' divise P, il existe $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = RP'$. On a nécessairement $\deg R = 1$, c'est-à-dire qu'il existe $\mu \in \mathbf{C}^*$ et $a \in \mathbf{C}$ tels que $R = \mu(X - a)$. Alors

$$\frac{P'}{P} = \frac{1/\mu}{X - a}.$$

Vu la question précédente et d'après l'unicité de la décomposition en éléments simples, on en déduit que P n'a qu'une seule racine, qui est a. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $m \geqslant 1$ tels que $P = \lambda(X - a)^m$. (De plus, $\mu = \frac{1}{m}$, mais cela n'apporte rien pour la suite.)

Réciproquement, si $P = \lambda(X - a)^m$ avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $m \geqslant 1$, on a $P' = m\lambda(X - a)^{m-1}$, et P' divise bien P.

Conclusion : les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^m$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $a \in \mathbf{C}$ et $m \geqslant 1$.