Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023
Cursus préparatoire — Algèbre 2 et analyse 2 22 février 2023

Devoir CUPGE n° 1
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice 1
Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{5X-4}{(X+1)(X-2)^2}.$$

Exercice 2

1. Montrer que $\ln(1+\operatorname{sh} x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x^4}{12} + o(x^4)$ quand $x \to 0$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+\operatorname{sh} x)}{1-\cos(\sin x)}.$$

Problème

Soit une fraction rationnelle $P/Q \in \mathbf{R}(X)$ ayant un pôle $a \in \mathbf{R}$ de multiplicité 2. On rappelle alors :

(a) que l'on peut écrire $Q(X) = (X-a)^2 R(X)$, où R est un polynôme tel que $R(a) \neq 0$;

(b) qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $G \in \mathbf{R}(X)$ sans pôle en a tels que $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2} + G(X)$.

Le but du problème est de trouver des expressions de λ et μ en fonction de $P(a)$, $P'(a)$, $Q(a)$ et $Q'(a)$.

1. Montrer que $\dfrac{P(a+h)}{R(a+h)} = \mu + \lambda h + o(h)$ lorsque $h \to 0$.
2. (a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour la fonction $f : x \mapsto \frac{P(x)}{R(x)}$ au voisinage de a.
   (b) En déduire des expressions de λ et μ en fonction de $P(a)$, $P'(a)$, $R(a)$ et $R'(a)$.
3. (a) Montrer que $R(X) = \dfrac{Q''(a)}{2!} + \dfrac{Q'''(a)}{3!}(X-a) + \cdots + \dfrac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^{m-2}$, où $m = \deg(Q)$.
   (b) En déduire que

$$\lambda = \frac{6P'(a)Q''(a) - 2P(a)Q'''(a)}{3Q''(a)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)}.$$

4. **[Application]** Soit $n \geqslant 3$. En admettant que ces formules sont encore vraies lorsque $P/Q \in \mathbf{C}(X)$ et $a \in \mathbf{C}$, trouver la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de $\dfrac{1}{(X^n-1)^2}$.