
Devoir CUPGE n° 1
Corrigé

Exercice 1

Comme $\deg F = 1 - 3 = -2 < 0$, la partie entière dans la décomposition en éléments simples de F est nulle. Il existe donc $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{5X-4}{(X+1)(X-2)^2} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}.$$

Si on multiplie cette égalité par $X+1$ puis qu'on évalue en $X = -1$, on trouve $a = \dfrac{-5-4}{(-1-2)^2} = -1$.

De même, si on multiplie par $(X-2)^2$ puis qu'on évalue en $X = 2$, on trouve $c = \dfrac{10-4}{2+1} = 2$.

On a donc

$$\frac{5X-4}{(X+1)(X-2)^2} = \frac{-1}{X+1} + \frac{b}{X-2} + \frac{2}{(X-2)^2}.$$

On peut par exemple évaluer en $X = 0$, ce qui donne

$$\frac{-4}{4} = -1 - \frac{b}{2} + \frac{2}{4},$$

d'où l'on déduit $b = 1$. Ainsi, on a

$$\boxed{F(X) = \frac{-1}{X+1} + \frac{1}{X-2} + \frac{2}{(X-2)^2}}$$

Exercice 2

1. Comme $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$, on écrit $\ln(1 + \operatorname{sh} x) = \ln\left(1 + x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$ et on applique la formule de composition des développements limités :

$$\begin{aligned}
\ln(1+\operatorname{sh} x) &= \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).
\end{aligned}$$

En simplifiant cette expression, on trouve bien ce qui était demandé :

$$\boxed{\ln(1+\operatorname{sh} x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{12} + o(x^4)}$$

2. De même, on calcule

$$\begin{aligned}
\cos(\sin x) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).
\end{aligned}$$

En utilisant ce résultat et celui de la question 1, on en déduit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{12} + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)} \\
&= \frac{1 - x + \frac{5x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{5x^2}{12} + o(x^2)} \\
&= \left(1 - x + \frac{5x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{5x^2}{12} + o(x^2)\right) \\
&= 1 + \frac{5x^2}{12} - x + \frac{5x^2}{6} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\boxed{f(x) = 1 - x + \frac{5x^2}{4} + o(x^2)}$$

Problème

1. Multiplions les deux membres de l'égalité $\dfrac{P(X)}{Q(X)} = \dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2} + G(X)$ par $(X-a)^2$:

$$(X-a)^2\frac{P(X)}{Q(X)} = \lambda(X-a) + \mu + (X-a)^2 G(X).$$

Comme on sait que $Q(X) = (X-a)^2 R(X)$, on a

$$\frac{P(X)}{R(X)} = \lambda(X-a) + \mu + (X-a)^2 G(X).$$

Remplaçons maintenant X par $a+h$:

$$\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \lambda h + \mu + h^2 G(a+h).$$

Comme a n'est pas un pôle de G, la fonction associée à G est bien définie en a. Ainsi, la limite de $G(a+h)$ lorsque $h \to 0$ existe et est finie. Par conséquent, $hG(a+h) \to 0$ et donc $h^2G(a+h) = o(h)$ lorsque $h \to 0$. Cela montre donc que

$$\boxed{\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \mu + \lambda h + o(h) \text{ lorsque } h \to 0}$$

2.(a) Les fonctions $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto R(x)$ sont définies et dérivables au voisinage de a car sont des fonctions polynomiales. De plus, puisque R ne s'annule pas en a, la fonction $x \mapsto P(x)/R(x)$ est également définie et dérivable au voisinage de a. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Young, qui s'écrit

$$\frac{P}{R}(a+h) = \frac{P}{R}(a) + \left(\frac{P}{R}\right)'(a)\,h + o(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{P(a+h)}{R(a+h)} = \frac{P(a)}{R(a)} + \frac{P'(a)R(a) - P(a)R'(a)}{R(a)^2}h + o(h) \quad \text{lorsque} \quad h \to 0}$$

2.(b) En comparant les résultats des questions 1. et 2.(a), et par unicité des développements limités, on obtient immédiatement

$$\boxed{\lambda = \frac{P'(a)R(a) - P(a)R'(a)}{R(a)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{P(a)}{R(a)}}$$

3.(a) Écrivons la formule de Taylor pour les polynômes pour $Q(X)$ au point a :

$$Q(X) = Q(a) + Q'(a)(X-a) + \frac{Q''(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{Q'''(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^m.$$

Or, comme a est un pôle de multiplicité 2 de P/Q, on a $Q(a) = Q'(a) = 0$, d'où

$$Q(X) = (X-a)^2 \left(\frac{Q''(a)}{2!} + \frac{Q'''(a)}{3!}(X-a) + \cdots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^{m-2} \right).$$

Enfin, comme $R(X)$ est défini par $Q(X) = (X-a)^2 R(X)$, il vient

$$\boxed{R(X) = \frac{Q''(a)}{2!} + \frac{Q'''(a)}{3!}(X-a) + \cdots + \frac{Q^{(m)}(a)}{m!}(X-a)^{m-2}}$$

3.(b) L'égalité que l'on vient d'obtenir donne $R(a) = \dfrac{Q''(a)}{2!}$ quand on y fait $X = a$. Par dérivation, elle donne

$$R'(X) = \frac{Q'''(a)}{3!} + \frac{Q^{(4)}}{4!} \cdot 2(X-a) + \cdots + \frac{Q^{(m)}}{m!}(m-2)(X-a)^{m-3},$$

d'où $R'(a) = \dfrac{Q'''(a)}{3!}$ quand on évalue en $X = a$. On remplace ces expressions dans les formules trouvées à la question 2.(b) et on arrange un peu les fractions trouvées. On trouve alors les expressions demandées :

$$\boxed{\lambda = \frac{6P'(a)Q''(a) - 2P(a)Q'''(a)}{3Q''(a)^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{2P(a)}{Q''(a)}}$$

4. Posons $P(X) = 1$ et $Q(X) = (X^n - 1)^2$. Les pôles de P/Q sont les racines de l'unité $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, ils sont tous doubles. Comme $\deg(P/Q) < 0$, La décomposition en éléments simples de P/Q est donc de la forme

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_k}{X - \omega_k} + \frac{\mu_k}{(X-\omega_k)^2} \right),$$

avec $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1} \in \mathbf{C}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On applique maintenant les formules trouvées précédemment : étant donné que $P(\omega_k) = 1$ et $P'(X) = 0$, on a

$$\lambda_k = -\frac{2Q'''(\omega_k)}{3Q''(\omega_k)^2} \quad \text{et} \quad \mu_k = \frac{2}{Q''(\omega_k)}.$$

Or, comme $Q(X) = X^{2n} - 2X^n + 1$, on a

$$\begin{aligned}
Q'(X) &= 2n\left(X^{2n-1} - X^{n-1}\right), \\
Q''(X) &= 2n\left((2n-1)X^{2n-2} - (n-1)X^{n-2}\right), \\
Q'''(X) &= 2n\left((2n-1)(2n-2)X^{2n-3} - (n-1)(n-2)X^{n-3}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $Q''(\omega_k) = 2n^2\omega_k^{-2}$ et $Q'''(\omega_k) = 6n^2(n-1)\omega_k^{-3}$, d'où finalement (après calculs)

$$\lambda_k = \frac{1-n}{n^2}\omega_k \quad \text{et} \quad \mu_k = \frac{\omega_k^2}{n^2}.$$

Finalement, la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ de $1/(X^n - 1)^2$ est

$$\boxed{\frac{1}{(X^n-1)^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(1-n)\omega_k}{X-\omega_k} + \frac{\omega_k^2}{(X-\omega_k)^2}\right]}$$