
Examen final, session 2 du 28 juin

Durée 3 heures

Les documents, les téléphones, les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées

Exercice 1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, l'application linéaire définie par
 $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$; $f(e_2) = e_1 - e_3$; $f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Donner une base du noyau de f .
3. Donner une base de l'image de f .

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer un vecteur u_1 non nul tel que $f(u_1) = u_1$.
2. Déterminer un vecteur $u_2 = (x, x)$ tel que $f(u_2) = u_1 + u_2$.
3. Vérifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 et donner la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
4. Donner la matrice T de f dans la base \mathcal{B}' .
5. Calculer T^n pour tout entier $n \geq 0$.
6. Exprimer A^n en fonction de P et T^n , en déduire les coefficients de la matrice A^n .

Exercice 3.

Calculer

$$I = \int_1^2 9x^2 \ln(x) dx$$

Exercice 4.

1. Décomposer la fraction rationnelle $t \rightarrow \frac{t+2}{(t-1)^2}$ en éléments simples
2. A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer

$$J = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 1} dx$$

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle (E) $y'' - 4y' + 3y = (8x - 14)e^{-x}$

1. Résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2. Résoudre (E).

Exercice 6.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{4+x}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .

Indications : soit on pourra factoriser par 4 et utiliser une formule du cours, soit on pourra dériver f deux fois et utiliser la formule de Taylor-Young.

2. Calculer $f(x) - \left(2 + \frac{x}{4}\right)$ à l'aide du développement limité, en déduire que la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + 2$ est tangente au graphe de f au voisinage de 0.
3. Au voisinage de 0, préciser la position du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + 2$.

Exercice 7.

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les sous-ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y + z + 3t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 0, -3))$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.