Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 2 mars 2022

Devoir surveillé 1

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre. La calculatrice est interdite.

Exercice 1

1. (Question de cours) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\cosh(x)$.
2. Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0 de $\frac{\ln(\cosh x)}{x^2}$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \cosh(x)^{1/x^2}$

Exercice 2 Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$\frac{\sin x}{2-x}$$

Exercice 3

1. On considère la fonction définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in \mathbf{R}_+$ que l'on déterminera.
2. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{R}_+^*$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. Calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$.
6. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Déduire de la question précédente que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\frac{1}{nu_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k + \frac{1}{na}.$$
8. En déduire que $u_n \sim \frac{2}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
Indication : on rappelle que si une suite (w_n) converge, alors la suite de terme général $S_n = \frac{w_0+\cdots+w_n}{n+1}$ converge vers la même limite, cf. Feuille de TD 1 Exercice 8

Exercice 4 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

1. Donner les domaines de définition et de continuité de f.
2. Montrer que f est dérivable en tout point $x \notin \{-1, 1\}$ et calculer $f'(x)$.
3. Montrer que f n'est pas dérivable en $x = -1$ et $x = 1$.
4. Dresser le tableau de variation de f et représenter son graphe.