Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

L3 Enseignement

Contrôle Terminal

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif, pour un total de 40 *points.*

Exercice 1 (6 points)**.** On rappelle qu'un jeu de 32 cartes contient quatres couleurs : trèfle, carreau, cœur et pique. Chaque couleur est composée de huits valeurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as. On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une “main”.

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
2. Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :
   (a) un carré (4 cartes de même valeur) ;
   (b) deux paires sans carré (une paire est constituée de deux cartes de même valeur) ;
   (c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs. Exemple : 3 rois et 2 as) ;
   (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ;
   (e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant).

Exercice 2 (5 points)**.** Une urne U_1 contient 4 boules blanches et 3 noires et une urne U_2 contient 17 boules blanches et 18 noires.

1. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire une boule de l'urne U_1 sinon on tire une boule de l'urne U_2 .
   (a) Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche.
   (b) On a tiré une boule blanche ; calculer la probabilité pour qu'elle provienne de U_1.
   (c) On a tiré une boule noire ; calculer la probabilité pour qu'elle provienne de U_2.
2. On tire successivement et sans remise les 7 boules de l'urne U_1. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si la première boule blanche apparaît au k-ième tirage. Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 3 (4 points)**.** Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de $0,05$ de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

— si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité $0,96$;
— si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité $0,98$.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Qu'elle est la probabilité

1. que le contrôle se trompe ?
2. qu'une pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée ?

Exercice 4 (6 points)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle Z. Montrer que si F est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors Z admet F' pour densité.
5. On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer la fonction de répartition de Y. Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité de Y.
6. Reprendre la question précédente avec $Y = X^2$.

Exercice 5 (4 points)**.** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, et tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y_n(\omega) = n \text{ si } 0 \leq X(\omega) \leq 1/n \quad \text{et} \quad Y_n(\omega) = 0 \text{ si } X(\omega) > 1/n.$$

1. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle en loi ?
2. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle presque sûrement ?
3. La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle dans L_1 ?

Exercice 6 (6 points)**.** Un restaurant a chaque jour un seul plat à son menu parmis des pâtes, du poisson ou de la pizza. On note X_n la variable aléatoire telle que le n-ème jour : X_n vaut 1, 2 ou 3 si le plat servi est des pâtes, du poisson ou de la pizza respectivement.

— Si on a servi des pâtes la veille, alors aujourd'hui on a 20%, respectivement 60% et 20%, de chance de servir des pâtes, respectivement du poisson et de la pizza ;
— Si on a servi du poisson la veille, alors aujourd'hui on a 30%, respectivement 70%, de chance de servir des pâtes, respectivement de la pizza ;
— Si on a servi de la pizza la veille, alors aujourd'hui on a 50%, respectivement 50%, de chance de servir des pâtes, respectivement de la pizza ;

On décide de modéliser $(X_n)_{n\geq 0}$ par une chaîne de Markov homogène.

1. Donner sa matrice de transition et tracer le graphe associé.
2. Quelle est la probabilité que le restaurant serve de la pizza le jeudi sachant que l'on servait des pâtes le mardi précédent ?

3. Justifier l'existence puis calculer la loi stationnaire de cette chaîne de Markov.
4. Justifiez que la proportion de jours où l'on sert de la pizza tend vers un nombre que l'on calculera.

Exercice 7 (5 points)**.** Une machine produit des boulons dont le diamêtre devrait être égal à $8,3$ mm. On sait que la variable aléatoire X donnant le diamètre d'un boulon produit par la machine suit une loi normale. Sur la base d'un échantillon aléatoire de taille $n = 100$, on veut tester si la machine est bien réglée. La moyenne empirique des diamètres mesurés sur l'échantillon est de $8,57$ mm. L'écart-type empirique sans biais des diamètres mesurés sur l'échantillon est de $0,5$ mm.

1. Donner un intervalle de confiance pour l'espérance de X au risque d'erreur de 1%.
2. Effectuer un test statistique au risque d'erreur de 5% pour déterminer si la moyenne est de $8,3$ mm. Préciser la statistique utilisée ainsi que sa loi (exacte ou approchée).
3. On suppose maintenant que l'écart-type de X est connu et vaut $1,5$ mm. Effectuer un test statistique au risque d'erreur de 5% pour déterminer si la moyenne est de $8,3$ mm. Préciser la statistique utilisée ainsi que sa loi (exacte ou approchée).

Exercice 8 (4 points)**.** On lance un dé à 6 faces et on obtient :

- 62 fois la face 1 ;
- 50 fois la face 2 ;
- 76 fois la face 3 ;
- 68 fois la face 4 ;
- 111 fois la face 5 ;
- 83 fois la face 6.

À l'aide de cette expérience, déterminer si ce dé est équilibré au risque d'erreur de 5%.