

Fiche 5

CONTINUITÉ

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit O un ouvert de E . On suppose que la restriction de f à O , notée $f|_O$, est continue. Montrer que f est continue en tout point de O i.e. f est continue sur O .
2. Le résultat de la question précédente est-il vrai si on suppose cette fois que l'ensemble O n'est pas ouvert ?

Exercice 2. (Facultatif) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E .
2. Montrer que f est continue sur U et V .
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$. Plus généralement, soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| = \|a\|$, la fonction f est-elle continue en u ?

Exercice 3. (La continuité et la densité)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \rightarrow F$ surjective continue. Montrer que si $A \subset E$ est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F .

Exercice 4. (La "diagonale")

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que $\Delta = \{(y, y), y \in F\}$ est un fermé de $F \times F$.
2. Soient $f, g : E \rightarrow F$ continues. Montrer que

$$H = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de E .

3. Montrer que si f, g coïncident sur une partie A dense dans E alors $f = g$ sur E .

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On considère l'application

$$\begin{aligned} f & : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue sur $E \times E$ muni de la norme produit infinie : pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|(x, y)\|_{E \times E} = \max(\|x\|, \|y\|)$.

2. Soit A, B deux parties non vides de E . On rappelle que

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\|; a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont des compacts de E alors cette distance est atteinte i.e. il existe $a_0 \in A, b_0 \in B$ tel que $d(A, B) = \|a_0 - b_0\|$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E .

1. Montrer que $x \in E \mapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E .
2. En déduire que f est continue.

Exercice 7. Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie : pour tout $f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Considérons l'application de dérivation

$$\begin{array}{ccc} D & : & E \rightarrow E \\ & & f \mapsto f' \end{array}$$

- a. D est-elle continue sur E (pour $\|\cdot\|_\infty$) ?
- b. Peut-on munir E d'une norme qui rende D continue ?

Indication : considérer pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto e^{nx}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \text{Tr}(M) = 2\}$ est-il un ouvert, fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 9. Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ de \mathbb{C} telles que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n \geq 0}$ appartient à E , on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E . Dans la suite, on munit E de cette norme. Toutes les questions qui suivent se traiteront donc par rapport à cette norme.
2. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ pour tout $a \in E$.
 - a. Montrer que φ est linéaire et qu'elle est continue sur E .
 - b. Soit $F = \{a \in E; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\}$.
 - i) Montrer que F est un fermé de E .
 - ii) Montrer que F n'est pas un ouvert de E .
 - iii) Montrer que F n'est pas borné.