Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2021-2022

Analyse IV — Durée: 2 heures

Examen final du mardi 24 mai 2022

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème proposé est uniquement indicatif, le total sur 26 points prend en compte la longueur du sujet.

Exercice 1. ($\simeq 9$ points) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{-nx}}{n2^n} \end{array}$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -\ln 2$.
   (b) Montrer que pour tout $x \leq -\ln 2$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge.
   (c) On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ la fonction somme de cette série de fonctions. En déduire le domaine de définition de la fonction somme S qu'on notera D_S et montrer que S est continue sur D_S.
2. Montrer l'existence et calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
3. (a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -\ln 2$.
   (b) Montrer que S est de classe C^1 sur $]-\ln 2, +\infty[$ et que
   $$\forall x > -\ln 2, \quad S'(x) = \frac{-1}{2e^x - 1}.$$
   (c) En utilisant 3b et 2, déduire l'expression de $S(x)$ pour tout $x > -\ln 2$.
   (d) En déduire la valeur de la somme de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 2. ($\simeq 4$ points) On considère,

$$f : \begin{array}{rcl} [\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que $3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3) = \dfrac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$.
2. Montrer que f est développable en série entière sur $]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}[$ et que son développement est
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)(n+1)!} x^n.$$
   Déterminer le rayon de convergence de la série entière associée.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer $\int_0^{\frac{1}{8}} f(x)\mathrm{d}x$ comme somme d'une série numérique convergente (on ne cherche pas à calculer cette somme).

Exercice 3. **($\simeq 10$ points)** On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$.

1. On munit $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ de la norme infinie : pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

   Soit $P = \{f \in E \mid f \text{ est une fonction polynomiale}\}$.

   (a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^x$.

   Montrer que $\forall n \geq 1$, f_n appartient à $E \backslash P$.

   Indication : on rappelle qu'une fonction f est une fonction polynomiale si et seulement si f est indéfiniment dérivable et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $f^{(k)}$ est la fonction nulle.

   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ et préciser sa limite.

   (c) Montrer que l'ensemble P n'est pas un ouvert de E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

2. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \sup_{t\in[0;1/2]} |f(t)| + \displaystyle\int_{1/2}^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que N définit une norme sur E.

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall f \in E, \quad N(f) \leq \alpha \|f\|_\infty.$$

   (c) Montrer que les normes N et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

   Indication : on pourra utiliser les fonctions $g_n : x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. On considère l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = f\left(\frac{1}{3}\right) + \int_{2/3}^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que φ est une application linéaire continue sur E muni de la norme N.

4. Soit

$$H = \left\{ f \in E;\ f\left(\frac{1}{3}\right) + \int_{2/3}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 5 \right\}.$$

   (a) L'ensemble H est-il un fermé de E pour la norme N ?

   (b) Montrer que H n'est pas un ensemble compact de E pour la norme N.

Exercice 4. **($\simeq 3$ points)** On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$, $n \geq 1$ muni de la norme suivante :

$$\forall P \in E, \quad \|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

Soit

$$\begin{array}{rcrcl} f & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (P(t))^3 \mathrm{d}t \end{array}$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (H(t))^3 \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)(H(t))^2 \mathrm{d}t$ sont des $o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.
2. Montrer que f est différentiable sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle en tout point.

Correction de l'examen final d'analyse IV du 24 mai 2022

Correction de l'exercice 1

1. (a) Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, $\forall a > -\ln 2$.

Soit $a > -\ln 2$. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{e^{-na}}{n2^n} := v_n \tag{1}$$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto e^{-nx}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc son sup sur $[a,+\infty[$ est atteint en $x = a$ et vaut e^{-na}. Montrons que la série numérique $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

1ère méthode : On a $v_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, on peut appliquer donc la Règle de D'Alembert. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{e^{-(n+1)a}}{e^{-na}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-a}}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{e^{-a}}{2} = l < 1,$$

car exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\frac{e^{-a}}{2} < \frac{e^{\ln 2}}{2} = 1$.

Par suite, d'après la règle de D'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

2ème méthode : On a

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq v_n = \frac{e^{-na}}{n2^n} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2}) \tag{2}$$

car $\lim_{n\to+\infty} n^2 v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-na}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^{n(a+\ln 2)}} = 0$ par croissance comparée $(a + \ln 2 > 0)$.

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente $(\alpha = 2 > 1)$, on déduit de (2) que $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

3ème méthode : On a

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq v_n = \frac{e^{-na}}{n2^n} \leq \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $0 \leq q = \frac{e^{-a}}{2} < 1$ (voir 1ère méthode), on a alors $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n$ converge, et par suite $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge aussi.

Conclusion : On a montré que $\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)|$ converge ce qui n'est autre que la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[a,+\infty[$, pour tout $a > -\ln 2$.

(b) Soit $x_0 \leq -\ln 2$.

i) Si $x_0 = -\ln 2$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ (série harmonique).

ii) Si $x_0 < -\ln 2$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n(-x_0-\ln 2)}}{n} = +\infty \neq 0$$

car $-x_0 - \ln 2 > 0$ et par croissante comparée, $\forall \gamma > 0$, $\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{\gamma y}}{y} = +\infty$.

Par suite, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ diverge grossièrement en tout point $x_0 < -\ln 2$.

(c) Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

D'après la question 1a, $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -\ln 2$ et donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]-\ln 2, +\infty[$ car la convergence normale implique la convergence simple et pour $x > -\ln 2$, il existe $a > -\ln 2$ tel que $x \in [a, +\infty[$.

D'autre part d'après 1b, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ diverge en tout $x \leq -\ln 2$.

Par suite, le domaine de définition de S est $D_S =]-\ln 2, +\infty[$.

Comme

i) $\forall n \geq 1$, f_n est continue sur $]-\ln 2, +\infty[$ car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

ii) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]-\ln 2, +\infty[$ car d'après 1), $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > -\ln 2$ et la convergence normale implique la convergence uniforme.

Par suite, d'après le corollaire du Théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, S est continue sur $]-\ln 2, +\infty[= D_S$.

2. Montrons l'existence et calculons $\lim_{x\to+\infty} S(x)$. On va appliquer le Théorème d'interversion de limite et somme.
On a $\mathbb{R}^+$ est non majoré (on aurait pu prendre n'importe quel intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -\ln 2$) avec

   i) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ car converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ $(a = 0)$,

   ii) Soit $n_0 \geq 1$.
   On a $\lim_{x\to+\infty} f_{n_0}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-n_0 x}}{n_0 2^{n_0}} = 0$ finie, où on a utilisé le fait que $\lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0$.

   Par suite, d'après le Théorème d'interversion de limite et somme, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en $+\infty$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

3. (a) Montrons que $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -\ln 2$.

Soit $a > -\ln 2$.

Notons tout d'abord que pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 (même C^∞) sur $\mathbb{R}$ car exponentielle l'est sur $\mathbb{R}$. Et on a pour tout $n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\frac{e^{-nx}}{2^n}$.

D'où pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)| = \frac{e^{-na}}{2^n} = \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n. \tag{3}$$

Comme $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{-a}}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $0 \leq q = \frac{e^{-a}}{2} < 1$ (car $a > -\ln 2$ et exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$) donc convergente, on déduit que $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n'(x)|$ converge ce qui n'est autre que la convergence normale de $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > -\ln 2$.

(b) Montrons que S est de classe C^1 sur $]-\ln 2, +\infty[$ et que $\forall x > -\ln 2, \quad S'(x) = \frac{-1}{2e^x - 1}$.

i) On a pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $]-\ln 2, +\infty[$ avec $\forall x > -\ln 2$, $f_n'(x) = -\frac{e^{-nx}}{2^n}$.

ii) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]-\ln 2, +\infty[$ d'après 1.c).

iii) $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset]-\ln 2, +\infty[$ car d'après 3a, $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > -\ln 2$ et donc sur tout segment $[a,b] \subset]-\ln 2, +\infty[$ et la convergence normale implique la convergence uniforme.

Par suite, d'après le Théorème des séries de fonctions de classe C^1, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $]-\ln 2, +\infty[$ et on a pour tout $x > -\ln 2$,

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)'(x) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{2}\right)^n \\
&= -\frac{e^{-x}}{2}\frac{1}{1-\frac{e^{-x}}{2}} \\
&= -\frac{e^{-x}}{2}\frac{2}{2-e^{-x}} \\
&= -\frac{e^{-x}}{2-e^{-x}} \\
&= -\frac{1}{2e^x - 1}.
\end{aligned}$$

(c) En utilisant 3b et 2, on va calculer $S(x)$ pour tout $x > -\ln 2$. On a d'après 3b, pour tout $x > -\ln 2$,

1ère façon :

$$\begin{aligned}
S(x) &= -\int \frac{1}{2e^x - 1}dx + C \\
&= -\int \frac{1}{u(2u-1)}du + C \\
&= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{2u-1}\right) du + C \\
&= \ln|u| - \ln|2u-1| + C \\
&= \ln(e^x) - \ln(2e^x - 1) + C \\
&= -\ln\left(\frac{2e^x - 1}{e^x}\right) + C \\
&= -\ln(2 - e^{-x}) + C
\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $u = e^x$ dans la 2ème égalité.

2ème façon :

$$S(x) = -\int \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}}dx + C = -\ln(2-e^{-x}) + C$$

car $(2-e^{-x})' = e^{-x}$.

Calculons C :

D'après 2, $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$. D'où,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \big(-\ln(2-e^{-x}) + C\big) = -\ln 2 + C.$$

Par suite, $C = \ln 2$, et on a donc

$$\forall x > -\ln 2,\ S(x) = -\ln(2-e^{-x}) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2}{2-e^{-x}}\right).$$

(d) En déduire la valeur de la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

On a d'après 3c ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}=S(0)=\ln(\frac{2}{2-e^0})=\ln 2.$$

Correction de l'exercice 2

1. Soit $n\geq 2$. On a

$$\begin{aligned}3\times 5\times\cdots\times(2n-3)&=\frac{2\times 3\times 4\times\cdots\times(2n-3)\times(2n-2)}{2\times 4\times\cdots\times(2n-2)}\\&=\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(1\times 2\times\cdots\times(n-1))}\\&=\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\end{aligned}$$

2. On rappelle que

$$\begin{aligned}\forall u\in\mathbb{R};|u|<1,\quad (1+u)^{\frac{1}{2}}&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-1)\times...\times(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}u^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times(-3)\times...\times(-2n+3)}{n!\,2^n}u^n\\&=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times...\times(2n-3)}{n!\,2^n}u^n\end{aligned}\tag{4}$$

Par suite, $\forall x\in\mathbb{R}$ tel que $|4x|<1$ i.e. $|x|<\frac{1}{4}$, on a

$$\begin{aligned}1-\sqrt{1-4x}&=-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times...\times(2n-3)}{n!\,2^n}(-4x)^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times...\times(2n-3)}{n!}2^nx^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\,n!}2^nx^n\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\times(2n-2)!}{(n-1)!\,n!}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\times(2n)!}{n!(n+1)!}x^{n+1}\end{aligned}$$

où on a utilisé 1) dans la 3ème égalité.

D'où $\forall x\in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[\setminus\{0\}$,

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n\tag{5}$$

Notons que (5) reste vraie pour $x=0$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}0^n=\frac{0!}{0!\,1!}=1=f(0)$.

Par suite, f est développable en série entière en 0 et on a

$$\forall x\in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[=]-r,r[,\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}x^n:=S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

avec le rayon de convergence R de la série entière associée vérifie $R \geq r = \frac{1}{4}$.

Calculons R : On a $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{|a_n+1|}{|a_n|} &= \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{n!}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n^2} \\ &= 4 \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4 = l. \end{aligned}$$

Par suite, d'après la règle de D'Alembert, $R = \frac{1}{l} = \frac{1}{4}$.

3. i) Montrons que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

   1ère façon : Notons que f est C^∞ sur l'ouvert $]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}[\setminus\{0\}$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc $x \mapsto 1 - \sqrt{1-4x}$ est C^∞ sur $]-\infty, \dfrac{1}{4}[$, en particulier sur sur $\left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Par suite, par produit de fonctions C^∞, f est C^∞ sur $]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}[\setminus\{0\}$.
   Reste à montrer que f est C^∞ au voisinage de 0, ce qui est vrai car f est développable en série entière en 0.
   D'où f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

   2ème façon : On a $f = S$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[=]-r, r[\subset]-R, R[$ (ici $]-r, r[=]-R, R[$). Comme S est C^∞ sur $]-R, R[$ (car S somme d'une série entière de rayon de convergence $R = \frac{1}{4}$), on déduit alors que f est C^∞ sur $]-r, r[=]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$.

   ii) Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(0)$.
   Comme $f = S$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = S^{(n)}$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f^{(n)}(0) = S^{(n)}(0) = n!\, a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!}.$$

4. Comme $f = S$ sur $[0, \frac{1}{8}] \subset]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[=]-r, r[\subset]-R, R[$ (ici $]-r, r[=]-R, R[$), on peut alors intervertir intégrale et somme et on obtient
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{8}} f(x)dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \int_0^{\frac{1}{8}} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{8}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!(n+1)8^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)^2 8^{n+1}} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$, il en est de même de f_n. De plus, on montre par récurrence immédiate sur k que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0;1]$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{1}{n}e^x$ (autrement dit que $f_n^{(k)} = f_n$). Puisque $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{1}{n} \neq 0$, aucune des dérivées de f_n n'est la fonction nulle, donc f_n n'est pas une fonction polynomiale. Par conséquent, f_n appartient à $E \setminus P$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par positivité et croissance de la fonction f_n sur $[0;1]$, il vient

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0;1]} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{n}e^1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\|f_n - 0_E\|_\infty = \|f_n\|_\infty$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ce qui démontre que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle 0_E pour la norme $\| \ \|_\infty$.

(c) On vient de voir que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $E\backslash P$ qui converge pour la norme $\| \ \|_\infty$ vers 0_E. Or cette limite appartient à P (c'est une fonction polynomiale), donc n'est pas dans $E\backslash P$. La caractérisation séquentielle des fermés permet de conclure que $E\backslash P$ n'est pas un fermé de E pour $\| \ \|_\infty$. Ceci est équivalent au fait que son complémentaire P n'est pas un ouvert de E pour $\| \ \|_\infty$.

2. (a) Tout d'abord, si $f \in E$, alors f est continue sur le segment $[0;1]$, donc elle est bornée sur $[0;1]$, ainsi $\sup\limits_{t\in[0:1/2]} |f(t)|$ existe et est un réel positif. De même, la continuité de $|f|$ sur le segment $[1/2;1]$ démontre son intégrabilité sur $[0;1]$, et sa positivité montre que $\displaystyle\int_{1/2}^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est un réel positif. Ainsi, N est bien définie de E dans $\mathbb{R}^+$.

Soit $f \in E$, puisqu'une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chacun des termes de la somme est nulle,

$$\begin{aligned}
N(f) = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} \sup\limits_{t\in[0;1/2]} |f(t)| = 0 \\ \int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall t \in [0;1/2], \quad |f(t)| = 0 \\ \forall t \in [1/2;1], \quad |f(t)| = 0 \end{cases} \qquad (*) \\
&\iff \quad \forall t \in [0;1], \quad f(t) = 0 \\
&\iff \quad f = 0_E
\end{aligned}$$

où l'équivalence $(*)$ provient du fait que pour tout $t \in [0;1/2]$, $0 \leq |f(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |f(x)|$, et du fait que l'intégrale d'une fonction continue à valeurs positives est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle sur l'intervalle d'intégration.

Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par propriété de la borne supérieure ($\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ si $\alpha \geq 0$) et linéarité de l'intégrale,

$$N(\lambda f) = \sup_{t\in[0;1/2} |\lambda|\,|f(t)| + \int_{1/2}^1 |\lambda|\,|f(t)|\ \mathrm{d}t = |\lambda| \left(\sup_{t\in[0;1/2} |f(t)| + \int_{1/2}^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t \right) = |\lambda|\, N(f).$$

Enfin, soient $f, g \in E$. Pour tout $t \in [0;1/2]$, l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue entraîne $|f(t)+g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |g(x)|$. Puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que $\sup\limits_{t\in[0;1/2]} |f(t)+g(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |g(x)|$. La croissance et la linéarit'e de l'intégrale impliquent alors

$$\begin{aligned}
N(f+g) \quad &= \quad \sup_{t\in[0:1/2]} |f(t)+g(t)| + \int_{1/2}^1 |f(t)+g(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \quad \sup_{x\in[0;1/2]} |f(x)| + \sup_{x\in[0;1/2]} |g(x)| + \int_{1/2}^1 |f(t)|\ \mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 |g(t)|\ \mathrm{d}t = N(f) + N(g).
\end{aligned}$$

L'application N définit bien une norme sur E.

(b) Soit $f \in E$. Comme $[0;1/2] \subset [0;1]$, on a déjà $\sup\limits_{t\in[0;1/2]} |f(t)| \leq \sup\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$. De plus, comme pour tout $t \in [1/2;1]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$, on trouve

$$\int_{1/2}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{1/2}^{1} \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$$

ce qui entraîne

$$N(f) \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{2}\|f\|_\infty = \frac{3}{2}\|f\|_\infty$$

et prouve l'existence de la constante α demandée. On pourrait même démontrer que $3/2$ est la plus petite constante permettant d'avoir cette majoration en prenant la fonction constante égale à 1 par exemple.

(c) Suivons l'indication, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est positive et croissante sur $[0;1]$, donc $\|g_n\|_\infty = g_n(1) = 1$. De plus,

$$N(g_n) = \sup_{t\in[0;1/2]} t^n + \int_{1/2}^{1} t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n} + \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

1ère méthode : Supposons par l'absurde que les normes $\|\ \|_\infty$ et N sont équivalentes, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \beta N(f)$. En appliquant ceci en particulier aux fonctions g_n, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \beta\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

qui donne la contradiction $1 \leq 0$ lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$. Par suite, les normes N et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2ème méthode : D'après (6) $\lim\limits_{n\to+\infty} N(g_n) = 0$ et donc $g_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0_E$ dans (E, N).
D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$, alors $g_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0_E$ dans $(E, \|\,.\,\|_\infty)$.
Conclusion : On a donc trouvé une suite $(g_n)_n$ qui converge vers 0_E dans E muni de la norme N et ne converge pas vers 0_E dans E muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Par suite les normes $\|\,.\,\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

3. La linéarité provient de la linéarité de l'évaluation en un point et de la linéarité de l'intégrale : pour tout $f, g \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)\left(\frac{1}{3}\right) + \int_{2/3}^{1} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(f) + \varphi(g).$$

Munissons $\mathbb{R}$ de la valeur absolue (on peut choisir la norme que l'on souhaite sur $\mathbb{R}$ puisque $\dim(\mathbb{R}) = 1 < +\infty$, et toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}$) alors, pour tout $f \in E$,

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left| f\left(\frac{1}{3}\right) + \int_{2/3}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| f\left(\frac{1}{3}\right)\right| + \left|\int_{2/3}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sup_{t\in[0;1/2]} |f(t)|\ \mathrm{d}t + \int_{2/3}^{1} |f(t)|\ \mathrm{d}t \quad \text{car } 1/3 \in [0;1/2] \\
&\leq \sup_{t\in[0;1/2]} |f(t)|\ \mathrm{d}t + \underbrace{\int_{1/2}^{2/3} |f(t)|\ \mathrm{d}t}_{\geq 0} + \int_{2/3}^{1} |f(t)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{t\in[0;1/2]} |f(t)|\ \mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} |f(t)|\ \mathrm{d}t \text{ par la relation de Chasles} \\
&\leq N(f)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé une constante $k = 1 \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| \leq kN(f)$, donc par l'une des caractérisations équivalentes de la continuité pour une application linéaire, φ est continue sur E pour la norme N.

4. (a) On remarque que

$$H = \{f \in E \mid \varphi(f) \geq 5\} = \{f \in E \mid \varphi(f) \in [5; +\infty[\} = \varphi^{-1}\left([5; +\infty[\right).$$

Ainsi, H est l'image réciproque du fermé $[5; +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par la fonction φ continue pour la norme N sur l'espace vectoriel E, donc H est un fermé de E muni de la norme N.

(b) On sait qu'un ensemble compact est toujours fermé et borné. Montrons que H n'est pas borné. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, h_n la fonction constante égale à n. On a alors $h_n \in E$ et $\varphi(h_n) = n + \displaystyle\int_{2/3}^1 n\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}n$. Par suite, la fonction h_n appartient à H lorsque $n \geq 4$. Comme de plus, pour tout $n \geq 4$, $N(h_n) = n + \displaystyle\int_{1/2}^1 n\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il n'est pas possible de trouver $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant : $\forall h \in H$, $N(h) \leq M$, ce qui démontre que H n'est pas borné pour la norme N. L'ensemble H n'est donc pas un compact de E pour la norme N.

Correction de l'exercice 4

1. a. On a $\forall H \in E$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (H(t))^3 \mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^1 |(H(t))^3| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |H(t)|^3 \mathrm{d}t \\ &\leq \|H\|^3 \int_0^1 \mathrm{d}t \\ &= \|H\|^3 \qquad (6)\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que pour tout $t \in [0,1]$, $|H(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} |H(x)| = \|H\|$ et que $t \mapsto t^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Par suite, d'après (6), on a $\forall H \in E$, $H \neq 0_E$,

$$0 \leq \frac{\left|\int_0^1 (H(t))^3 \mathrm{d}t\right|}{\|H\|} \leq \|H\|^2 \underset{H\to 0_E}{\to} 0.$$

D'où $\lim\limits_{H\to 0_E} \dfrac{\left|\int_0^1 (H(t))^3 \mathrm{d}t\right|}{\|H\|} = 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 (H(t))^3 \mathrm{d}t = o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.

b. De même, on a $\forall H \in E$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 P(t)(H(t))^2 \mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^1 |H(t)|^2 |P(t)| \mathrm{d}t \\ &\leq \|H\|^2 \int_0^1 |P(t)| \mathrm{d}t \qquad (7)\end{aligned}$$

où on a utilisé cette fois le fait que pour tout $t \in [0,1]$, $|H(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} |H(x)| = \|H\|$ et que $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par suite, $\forall H \in E$, $H \neq 0_E$,

$$0 \leq \frac{\left|\int_0^1 P(t)(H(t))^2 \mathrm{d}t\right|}{\|H\|} \leq \|H\| \int_0^1 |P(t)| \mathrm{d}t \underset{H\to 0_E}{\to} 0$$

où on a utilisé (7) et le fait que $|P|$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t = C_P \in \mathbb{R}^+$ (on aurait pu aussi majorer $\displaystyle\int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t$ par $\|P\|_\infty$) .

D'où $\displaystyle\lim_{H\to 0_E} \frac{\left|\int_0^1 P(t)(H(t))^2\mathrm{d}t\right|}{\|H\|} = 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 P(t)(H(t))^2\mathrm{d}t = o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.

2. Montrons que f est différentiable sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ et calculons sa différentielle en tout point.

   Soit $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $H \in E$,

$$\begin{aligned}
f(P+H) - f(P) &= \int_0^1 (P(t)+H(t))^3\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (P(t))^3\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[(P(t))^3 + 3(P(t))^2H(t) + 3(H(t))^2P(t) + (H(t))^3\right]\mathrm{d}t - \int_0^1 (P(t))^3\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^1 (P(t))^2H(t)\mathrm{d}t + 3\int_0^1 (H(t))^2P(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 (H(t))^3\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   où on a utilisé le fait que $\forall a,\, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et la linéarité de l'intégrale.

   Posons

$$\begin{array}{rccc} L_P & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & H & \mapsto & 3\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2H(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

   L_P est linéaire car l'intégrale l'est.

   En effet, d'après la linéarité de l'intégrale, on a $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall H_1,\ H_2 \in E$

$$L_P(\alpha H_1+H_2) = 3\int_0^1 (P(t))^2(\alpha H_1(t)+H_2(t))\mathrm{d}t = 3\alpha\int_0^1 (P(t))^2H_1(t)\mathrm{d}t + 3\int_0^1 (P(t))^2H_2(t)\mathrm{d}t = \alpha L_P(H_1)+L_P(H_2).$$

   D'autre part, on vu dans 1) que $\displaystyle\int_0^1 (H(t))^3\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)(H(t))^2\mathrm{d}t$ sont des $o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.

   D'où $\displaystyle\int_0^1 (H(t))^3\mathrm{d}t + 3\int_0^1 P(t)(H(t))^2\mathrm{d}t = o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.

   Conclusion : Pour tout $P \in E$, on a donc trouvé une application linéaire $L_P : E \to \mathbb{R}$ tel que $f(P+H) - f(P) - L_P(H) = o(\|H\|)$ quand $H \to 0_E$.

   Par suite, f est différentiable en P, $\forall P \in E$ et on a $\forall P \in E$,

$$\begin{array}{rcccc} df(P) = L_P & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & H & \mapsto & 3\displaystyle\int_0^1 (P(t))^2H(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

   D'où f est différentiable sur E avec

$$\begin{array}{rcccc} df & : & E & \to & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ & & P & \mapsto & L_P. \end{array}$$