

Exercice 1. Projection orthogonale

On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\{a_1, a_2, a_3\}$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et A la matrice de $\mathcal{M}_{4 \times 3}$ dont les colonnes sont données par les vecteurs a_1, a_2, a_3 exprimés dans la base canonique. On désigne par V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces vecteurs a_1, a_2, a_3 . En particulier, on peut penser à un vecteur quelconque v de V comme une combinaison linéaire de a_1, a_2, a_3 :

$$v \in V \Leftrightarrow \text{il } \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A \in \mathcal{M}_{4 \times 3}$ une matrice avec quatre lignes et trois colonnes de rang $r \leq 3$.

- Montrer que ${}^t A \cdot A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ et $A \cdot {}^t A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$ sont symétriques semidéfinies positives (une matrice réelle symétrique H est dite semidéfinie positive si la forme bilinéaire symétrique associée : $\beta(x, y) = \langle x, Hy \rangle$ est positive).
- Montrer que ${}^t A \cdot A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ et $A \cdot {}^t A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$ sont de rang r .

Pour le reste de l'exercice on suppose que $r = 3$.

- On considère les matrices

$$P_1 = A \cdot ({}^t A \cdot A)^{-1} \cdot {}^t A \text{ et } P_2 = I_4 - P_1.$$

$I_4 \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$ - matrice identité. Montrer que P_1 et P_2 sont symétriques et idempotentes (on dit qu'une matrice C est idempotente si $C^2 = C$).

- Soit $b \in \mathbb{R}^4$. Déterminer la formule pour $\bar{b}$, la projection orthogonale de b sur V , en écrivant que $\bar{b} \in V$ et $b - \bar{b}$ est orthogonal à tout vecteur de V .
- En déduire une expression de $d_V^2(b) := \min\{\|b - v\|; v \in V\}$ et $d_{V^\perp}^2(b) := \min\{\|b - w\|; w \in V^\perp\}$ en fonction de A et de b .

1.1. $\langle x, {}^t A A x \rangle = \langle A x, A x \rangle \geq 0$ par les propriétés du produit scalaire.

Et $\langle x, A {}^t A x \rangle = \langle {}^t A x, {}^t A x \rangle \geq 0$ — " — dans $\mathbb{R}^3$ sans $\mathbb{R}^4$.

1.2. On a $\text{Ker } A \subset \text{Ker } {}^t A \cdot A$ (car si $x \in \text{Ker } A$ alors $Ax = 0$ et ${}^t A Ax = 0$). Réciproquement, si $y \in \text{Ker } {}^t A \cdot A$, c.à.d. ${}^t A Ay = 0$, il s'en suit $\langle {}^t A Ay, y \rangle = \langle Ay, Ay \rangle = 0 \Rightarrow Ay = 0$ par la propriété "défini" du produit scalaire.

Par conséquent $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^t A A$ et $\text{rg } A = 3 - \dim \text{Ker } A = 3 - \dim \text{Ker } {}^t A A = \text{rg } {}^t A A$.
On opère de la même manière avec ${}^t A \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ et $A A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ pour arriver à $\text{rg } {}^t A (= \text{rg } A) = \text{rg } A {}^t A$.

1.3. Symétrie : ${}^t P = P$, en effet,

$${}^t (A ({}^t A A)^{-1} {}^t A) \stackrel{(1)}{=} ({}^t A) ({}^t ({}^t A A)^{-1}) {}^t A \stackrel{(2)}{=} A ({}^t A A)^{-1} A$$

$$\stackrel{(3)}{=} A \left({}^t A ({}^t A) \right)^{-1} {}^t A \stackrel{(2)}{=} A ({}^t A A)^{-1} A$$

où on utilise que $\forall$ matrices M, N on a

$$(1) \quad {}^t(MN) = {}^t N {}^t M$$

$$(2) \quad {}^t({}^t M) = M \text{ pour } M \text{ de dim finie}$$

$$(3) \quad {}^t(M^{-1}) = ({}^t M)^{-1} \text{ car } I = {}^t I = {}^t(MM^{-1})$$

$$= {}^t(M^{-1}) \cdot {}^t M = ({}^t M)^{-1} {}^t M \text{ et l'inverse}$$

↓ d'une matrice est unique.

Pour P_2 on utilise que pour toutes matrices
 ${}^t(M+N) = {}^t M + {}^t N : {}^t P_2 = {}^t(I - P_1) = {}^t I - {}^t P_1 = I - P_1 = P_2$

Idempotente: $P_1^2 = P_1$ car

$$A \underbrace{({}^t A A)^{-1} {}^t A}_{I_3} \cdot A ({}^t A A)^{-1} {}^t A = A ({}^t A A)^{-1} {}^t A.$$

$$\text{et } P_2^2 = P_2, \text{ car } P_2^2 \stackrel{I_3}{=} (I_4 - P_1)^2 = I_4 - 2P_1 + P_1^2 = I_4 - 2P_1 + P_1 = P_2$$

$$1.4 \quad \bar{b} \in V \Leftrightarrow \exists C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ t.g. } \bar{b} = AC.$$

Si non $\langle b - AC, Ax \rangle = 0$ comme V est le sous-espace de Ax , $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \langle {}^t A(b - AC), x \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow {}^t A(b - AC) = 0$$

$$\text{Soit } {}^t A A C = {}^t A b \Rightarrow C = ({}^t A A)^{-1} {}^t A b$$

$$\text{et donc } \boxed{\bar{b} = A ({}^t A A)^{-1} {}^t A b} = P_1 b \text{ noté ici } d^2$$

1.5] Il s'agit d'une distance de b à V - c'est une longueur d'un perpendiculaire: $\|b - \bar{b}\|$ - car

$$\|d_V^2(b)\| = \|b - \bar{b}\| = \|(I - P_1)b\| = \|P_2 b\|$$

$$\text{et } \|d_V^2(b)\| = \|\bar{b}\| = \|P_1 b\|$$

la distance la plus courte est par le chemin orthogonal.

Exercice 2. Matrices orthogonales

Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère S_4 , le groupe de toutes les permutations de quatre éléments. Pour toute permutation $\sigma \in S_4$; $\sigma : i \mapsto \sigma(i) \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ on désigne par M_σ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad M_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ x_{\sigma(3)} \\ x_{\sigma(4)} \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la définition du groupe. Définir en explicitant le calcul le nombre d'éléments du groupe S_4 .
2. Montrer que la matrice M_σ est orthogonale.
3. Soit M_α la matrice inverse de M_σ . Exprimer α en fonction de σ . Mentiner pourquoi on peut toujours trouver un tel $\alpha \in S_4$.
4. Montrer qu'il existe une valeur propre réelle commune à toutes les matrices $M_\sigma, \sigma \in S_4$. Trouver un vecteur propre commun à toutes les matrices $M_\sigma, \sigma \in S_4$.
5. On désigne par f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est M_σ . Montrer qu'il existe un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ stable (=invariant) par tous les $f_\sigma, \sigma \in S_4$.
6. Expliciter la matrice M_η où $\eta(1) = 2, \eta(2) = 3, \eta(3) = 1, \eta(4) = 4$.

2.1. Un groupe G est un ensemble avec une opération de multiplication définie $\bullet : G \times G \rightarrow G$ t.q.

- $\bullet$ est associative $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$
- $\exists$ un élément neutre e t.q. $ea = ae = a$ pour $\forall a \in G$
- Pour $\forall a \in G$ il existe un élément inverse noté a^{-1} , t.q. $a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e$.

Nombre d'éléments dans le gp. de permutations de 4 éléments :

On a un choix d'envoyer 1 sur 4 places $\sigma(1) = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4$
puis 2 sur 3 restants
puis 3 sur 2 restants.

Ce qui fait $4 \times 3 \times 2 = 24$ éléments de S_4 !

2.2. Matrice M_σ est orthogonal car $\langle x, x \rangle = \langle Mx, Mx \rangle$, i.e. M est une isométrie ce qui est une des définitions de matrices orthogonales.

$$M_\alpha M_\sigma = Id \iff \forall (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ on a}$$

2.3.

$$M_\alpha M_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = M_\alpha \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ x_{\sigma(3)} \\ x_{\sigma(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\alpha(\sigma(1))} \\ x_{\alpha(\sigma(2))} \\ x_{\alpha(\sigma(3))} \\ x_{\alpha(\sigma(4))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(\sigma(1))=1 \\ \alpha(\sigma(2))=2 \\ \alpha(\sigma(3))=3 \\ \alpha(\sigma(4))=4 \end{cases}$$

Ce qui signifie exactement que α est l'inverse de σ dans le gp. S_4 : $\alpha \sigma = Id$.

S_4 est un groupe $\Rightarrow$ tout élément possède un inverse $\Rightarrow \alpha$ existe: $\alpha = \sigma^{-1}$.

2.4 Cherchons un vecteur propre commun à tout M_σ . On voit que si dans v on a $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ $M_\sigma(v) = v$ pour $\forall$. Alors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre commun à toutes M_σ à valeur propre 1.

2.5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. On peut représenter H sous la forme $H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \langle x, y \rangle = 0\}$ où $H^\perp \setminus \{0\}$, c'est-à-dire: $\forall x \in H, \langle f_\sigma(x), y \rangle = \langle x, {}^t(f_\sigma)y \rangle = 0$ ou encore $({}^t(f_\sigma)y) \in H^\perp$, soit $({}^t(f_\sigma)y) = \lambda y$ pour un certain réel λ . Comme f_σ est orthogonal on a $({}^t(f_\sigma)) = (f_\sigma)^{-1} = f_{\sigma^{-1}} \forall \sigma \in S_n$. La recherche de H stable par tous f_σ revient à celle de $y \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ t.q.

$\forall \sigma \in S_n, \exists \lambda \in \mathbb{R} f_\sigma(y) = \lambda y$. D'après la question précédente le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre à toute matrice M_σ . Cela implique que l'hyperplan orthogonal à v est stable par tous les f_σ d'où

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

2.6. $\begin{cases} \eta(1)=2 \\ \eta(2)=3 \\ \eta(3)=1 \\ \eta(4)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}$ Alors sur les vecteurs de base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\eta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice

$$M_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$