

Exercice 1. Vrai ou faux

Indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Justifier votre réponse - donner une preuve courte (sans justification la réponse est traitée comme nulle)

1. La matrice de projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur l'intersection des plans d'équations $5x - 2y = 0$ et $x + z = 0$ est semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Les matrices $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ de déterminant 1 forment un groupe multiplicatif.
3. La matrice de rotation du plan de l'angle $\pi/2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a deux valeurs propres réelles.
4. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On considère une matrice U à n lignes et m colonnes ($m \leq n$). Une telle matrice U dont les colonnes sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthonormés satisfait $U^t U = I_n$.

1. Vrai: L'intersection de deux plans dans $\mathbb{R}^3$ est une droite. Si on choisit une base avec deux premiers vecteurs (non-colinéaires) orthogonaux à cette droite ils sont projetés sur 0. Le troisième vecteur de cette base choisi sur la droite est projeté sur lui-même. D'où la matrice.

2. Vrai: Les axiomes du groupe sont vérifiés

- Soient A, B deux matrices de $\det \neq 0$. Leur produit est aussi.
- Élément neutre: la matrice unitaire a $\det I = 1$ (est dans le groupe)
- Les matrices de $\det \neq 0$ sont inversibles. Leur inverse a aussi le $\det \neq 0$.

3. Faux. La matrice de rotation de $\pi/2$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'a pas de valeurs propres réelles car le polynôme caractéristique $x^2 + 1$ n'a pas de racines réelles.

4. Faux. $u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^t$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \dots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$

En effet, par exemple $(U \cdot \bar{U})_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2$

Il n'y a pas de raison pourquoi cette coeff. soit = 1.

Exercice 2. La projection orthogonale

Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer :

1. une base $\mathcal{B}$ du supplémentaire orthogonal $V^\perp$ de V .
2. la matrice P de projection orthogonale sur V dans la base (a_1, a_2, a_3) complétée par la base de $V^\perp$.
3. la matrice de projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur $V^\perp$ dans la base canonique.
4. le vecteur v de $V^\perp$ le plus proche au sens des moindres carrés de $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
5. En déduire le vecteur u de V le plus proche de b .

1. La dimension de V est 3. Alors $V^\perp$ est de dim 1.
On cherche un vecteur $a = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ orthogonal à

$$a_1, a_2, a_3. \text{ Cela donne 3 eqns: } \begin{cases} \langle a_1, v \rangle = 0 \\ \langle a_2, v \rangle = 0 \\ \langle a_3, v \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -w = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = w \\ y = -w \\ x = -w \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

2. Dans la base (a_1, a_2, a_3, a_4) la matrice de projection sur V est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car tout vecteur de V est envoyé vers lui-même et les vecteurs de $V^\perp$ sont envoyés vers 0.

3. Matrice de projection sur $V^\perp$ dans la base canonique.

$$P = \frac{a a^T}{a^T a} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a^T a) = (1 -1 1 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4, \text{ alors } (a^T a)^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$4. v = P(b) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$5. \mathbb{R}^4 = V \oplus V^\perp, \text{ donc } v + u = b \Rightarrow u = b - v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Matrice orthogonale symétrique

On considère une application $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que, dans la base canonique, ϕ est donnée par une matrice symétrique orthogonale B de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice de symétrie orthogonale par rapport à une droite D .

1. Expliquer pourquoi c'est une matrice orthogonale.
2. Donner un vecteur propre v de valeur propre 1 et un vecteur propre u de valeur propre -1 .
3. Trouver un vecteur directeur de la droite D .
4. Donner une équation cartésienne de la droite D .
5. Écrire la matrice de ϕ dans la base $\{v, u\}$. Notons la C . Écrire la relation entre les matrices B et C en précisant la matrice de passage en question.

1. Il y a plusieurs façons de montrer que B est orthogonale. Par définition la matrice B est orthogonale si $B^T B = I$. C'est un petit calcul.

On peut aussi remarquer que $\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ sont de norme 1 et sont orthogonaux, forment une base orthonormée. La matrice B donc envoie une base canonique (orthonormée) vers une base orthonormée, alors B est orthogonale.

$$2. \begin{pmatrix} 3/5-1 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & 4/5 \\ 4/5 & -8/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donne } \begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \\ \frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = 0 \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3/5+1 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 & 4/5 \\ 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donne } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

3. Les vecteurs de la droite D ne change pas sous ϕ - ils sont propres de valeur propre 1. Donc un vecteur directeur de D est par exemple $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$, vect. normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donne $\boxed{x - 2y = 0}$ ou $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$

$$5. C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } \boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}, P^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

car $\boxed{B = P C P^{-1}}$

$$B P(xe_1 + ye_2) = B(xv + yu) = (xv - yu) = P \cdot C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Des formes linéaires

On considère un élément f dans $(\mathbb{R}^2)^*$, l'espace dual de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$). Soit f défini par son action sur n'importe quel vecteur $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 3x - 4y.$$

1. Calculer le noyau F de la forme linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Donner les coordonnées du vecteur directeur unitaire U de F , dont la première coordonnée est positive.
2. Quelles sont les coordonnées du vecteur unitaire V , orthogonal à F dont la première coordonnée est positive.
3. Trouver un élément g de $(\mathbb{R}^2)^*$, tel que $g(V) = 1$ et $g(U) = -1$
4. Montrer que (f, g) forme une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

1. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 0 \quad 3x - 4y = 0$ pour $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $U = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

2. $V \perp U$. On prend $V = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$

3. Soit $g = \alpha x + \beta y$
 $\begin{cases} g(V) = 1 \\ g(U) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \frac{3}{5} + \beta \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = 1 \\ \alpha \cdot \frac{4}{5} + \beta \cdot \frac{3}{5} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 5 \\ 4\alpha + 3\beta = -5 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 5 \\ 0 + \beta + \frac{16}{3}\beta = -5 - \frac{4}{3} \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 5 \\ \frac{25}{3}\beta = \frac{-15 - 20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 4\beta = 5 \\ \beta = -\frac{7}{5} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{5} \\ \beta = -\frac{7}{5} \end{cases}$
 $g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}y$

4. $\{f, g\}$ forment une base car c'est une famille libre de deux vecteurs dans l'espace de dimension 2. En effet, si

$a f + b g = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, avec a ou b non-nuls
comme $g \neq 0$, a ne peut pas être nul, donc $\frac{b}{a}$ est bien défini. Alors $f = -\frac{b}{a}g$ mais on voit bien que f n'est pas proportionnel à g . Donc $a = b = 0$!