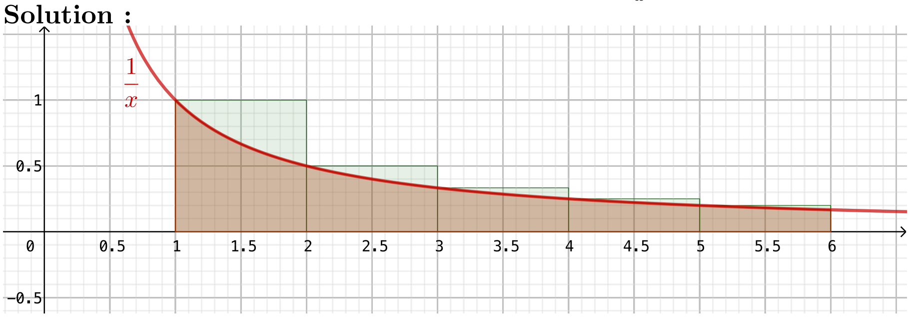
Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021
Fondamentaux des Mathématiques 2 12 mai 2021

Devoir 4 bis

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

1 Intégration

On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln(n+1)$.

1. Dresser sur $]0, 6]$ le graphe de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ et interpréter graphiquement u_5 et v_5.
Solution :


u_5 est l'aire des rectangles verts, v_5 est l'aire verte au-dessus du graphe de la fonction inverse. On voit tout de suite que, comme la fonction inverse est décroissante, la suite (v_n) est croissante.

2. Démontrer que, pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.
Solution :
La fonction inverse est décroissante sur $[n, n+1]$ et $\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n}$ qui s'intègre sur $[n, n+1]$ dans la relation demandée.

3. En déduire que pour $2 \leqslant n$ entier, $u_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_n$.
Solution :
En sommant les inégalités de 1 à n et en utilisant la relation de Chasles, on obtient
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
soit $u_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant u_n$.

4. En déduire que la suite (v_n) est bornée par 0 et 1.
Solution :
L'inégalité de gauche donne $u_n - \ln(n+1) \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} < 1$ et l'inégalité de droite donne $0 \leqslant u_n - \ln(n+1)$.

5. Montrer que, pour $n > 1$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$.
Solution :
$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$.

6. En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en croissant vers une limite qu'on ne cherchera pas à calculer.
Solution :
De la deuxième question, on tire, pour $n > 0$, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$ donc (v_k) est croissante, bornée par 0 et 1. Donc elle converge.

2 Équations différentielles

Soit l'équation différentielle réelle (E) $(x^4-1)y'+4y=1$.

1. Sur quels intervalles peut-on affirmer que (E) admet une solution unique pour une condition initiale $f(x_0)=y_0$ donnée ?
   Solution :
   La forme habituelle de l'équation différentielle est $y'+\frac{4}{x^4-1}y=\frac{1}{x^4-1}$ et les fonctions impliquées sont *a priori* définies sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de la solution de (E) qui passe par l'origine.
   Solution :
   0 n'est pas un point interdit de la fonction $x\mapsto\frac{4}{x^4-1}$. Soit f la solution telle que $f(0)=0$, définie de manière unique sur $]-1,1[$, alors $-f'(0)+4f(0)=1$ donc $f'(0)=-1$. La dérivée f' est dérivable et en dérivant les expressions présentes dans (E), on obtient $(x^4-1)f''(x)+4(x^3+1)f'(x)=0$ donc $f''(0)=-4$. Donc $f(x)=-x-2x^2+o(x^2)$.
3. Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme dont on déterminera tout d'abord le degré.
   Solution :
   Si un polynôme est solution, le degré de $(x^4-1)y'+4y-1$ est $4+(d-1)$ si $d>0$. Donc $d=0$ et la solution est la constante $\frac{1}{4}$.
4. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{4}{X^4-1}$.
   Solution :
   $\frac{4}{X^4-1}=\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}-\frac{2}{X^2+1}$.
5. En déduire l'ensemble des solutions de (E) et leur prolongement maximal par continuité.
   Solution :
   (E) est équivalent à $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2+1}$ donc $\ln|y|=\ln|x+1|-\ln|x-1|+2\arctan(x)+K$, $K\in\mathbb{R}$ et les solutions sont de la forme $\frac{1}{4}+\lambda\frac{x+1}{x-1}e^{2\arctan(x)}$, *a priori* sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. Il est clair qu'au point $x=-1$, on peut facilement prolonger la fonction sur $]-\infty,1[$. La solution constante peut-être prolongée sur $\mathbb{R}$ tout entier mais pour toutes les autres, $x=1$ est un point où la fonction ne peut pas être définie.
6. Déterminer la solution maximale de (E) qui passe par l'origine.
   Solution :
   Soit f la solution telle que $f(0)=0$, comme $f(x)=\frac{1}{4}+\lambda\frac{x+1}{x-1}e^{2\arctan(x)}$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$, on obtient $\lambda=-\frac{1}{4}$. Donc $f(x)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x+1}{x-1}e^{2\arctan(x)}\right)$.

3 Algèbre linéaire

Définissons pour $k\in\mathbb{N}$, deux suites $(e_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, par $e_k^k=1$, $e_n^k=\delta_{k,n}=0$ pour $n\neq k$, $w_n^0=1$ et $w_n^k=n^k$ pour $k>0$.

Soit $\left\{\begin{array}{ll}\Delta:\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto\big(\Delta\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)_k\big)_{k\in\mathbb{N}}\end{array}\right.$ définie par ses éléments $\Delta\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)_k=u_{k+1}-u_k$ pour $k\in\mathbb{N}$.

1. Échelonner la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$. En déduire qu'elle est de rang maximal.
   Solution :
   $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&2&6\\0&0&6&24\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&3\\0&0&0&6\end{pmatrix}$ elle est donc de rang 4.
2. Montrer que $\mathcal{B}=(w^k/0\leqslant k\leqslant 3)$ est une famille libre (on pourra exprimer w^k dans la famille libre $\mathcal{B}_0=(e^k/0\leqslant k\leqslant 3)$).
   Solution :

Les coordonnées des w^j dans la famille libre des e^i forment précisément la matrice de la question1 qui est de rang 4.

3. Calculer les 4 premières valeurs des suites $\Delta(w^k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$ et synthétiser ces données dans un tableau.

Solution :
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(w^0)_n = 0$, $\Delta(w^1)_n = n + 1 - n = 1$ donc la suite constante 1. De même,

n	0	1	2	3
w_n^0	1	1	1	1
$\Delta(w^0)_n$	0	0	0	0
w_n^1	0	1	2	3
$\Delta(w^1)_n$	1	1	1	1
w_n^2	0	1	4	9
$\Delta(w^2)_n$	1	3	5	7
w_n^3	0	1	8	27
$\Delta(w^3)_n$	1	7	19	37

.

4. Soit $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, montrer que $\Delta|_E \in \mathcal{L}(E)$ et montrer que sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :
Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta\big((u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)_k = (u_{k+1} + \lambda v_{k+1}) - (u_k + \lambda v_k) = \Delta\big(u\big)_k + \lambda\Delta\big(v\big)_k$. Donc Δ est linéaire. Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $\Delta(w^k)_n = (n+1)^k - n^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} n^\ell$ donc $\Delta(w^k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} w^\ell \in E$ si $w^k \in E$.

5. Compléter les “suites logiques” suivantes :

(a)

2	2	2	2	?

Solution :
$u_n = 2$ donc $u_4 = 2$.

(b)

1	4	7	10	?

Solution :
$u_n = 1 + 3n$ donc $u_4 = 13$.

(c)

2	5	10	17	?

Solution :
$u_n = 2 + 2n + n^2$ donc $u_4 = 26$. Mais il n'est pas nécessaire d'obtenir le polynôme, on l'obtient par différence, qui est d'ordre 1.

(d)

1	0	9	40	?

Solution :
$u_n = 1 - 2n - n^2 + 2n^3$ donc $u_4 = 105$.