Université Claude Bernard (Lyon 1) 2019-2020 Printemps
UE MathIV Algèbre Géométrique L2

Corrigé Fiche 4

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. On considère le produit ${}^tTT$. Que peut-on dire a priori sur les valeurs propres et les espaces propres de ${}^tTT$?
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de ${}^tTT$. On désigne cette base par $\mathcal{B}$ et par P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}. Diagonaliser ${}^tTT$.
3. Trouver alors S - la matrice symétrique définie positive, telle que $S^2 = {}^tTT$.
4. Quelle est la matrice de reflexion R telle que $RS = T$? Pourquoi c'est une reflexion ?

Corrigé :

1. La matrice ${}^tTT$ est symétrique, car
$$^t\left({}^tTT\right) = {}^tT^{tt}T = {}^tTT\ .$$
Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont tous réelles. Il est possible de trouver une base orthonormée (e_1, e_2) de vecteurs propres.
En fait, les valeurs propres ne sont pas seulement réelles mais même positives, car pour $j = 1, 2$
$$\lambda_j = \langle e_j, \lambda_j\, e_j\rangle = \langle e_j, f^* f e_j\rangle\langle f e_j, f e_j\rangle = \|f e_j\|^2 \geq 0\ .$$
2. On calcul
$${}^tTT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\ .$$
Pour une matrice 2×2, on sait que le produit de leur valeurs propres est le déterminant de la matrice et que la somme des valeurs propres est la trace. Donc ici $\lambda_1\lambda_2 = 25 - 16 = 9$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 10$. On se convainc que la solution est $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 9$.
Pour trouver les vecteurs propres, pose
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\ .$$
Le noyau de cette matrice est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui une fois normalisé devient $e_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On peut refaire le même calcul avec la valeur $\lambda_2 = 9$ ou simplement utiliser que e_2 doit être orthogonale à e_1 donc $e_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La base $\mathcal{B}$ est alors
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et la matrice de passage est

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

La méthode la plus simple pour inverser P est que sachant que P est orthonormale, on a $P^{-1} = {}^tP$, c'est-à-dire,

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie avec P et P^{-1} que

$$\begin{aligned}(P^{-1})\, {}^tTT\, P &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. La matrice S que nous cherchons est obtenu en utilisant la relation ${}^tTT = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1}$. Il suffit de remplacer la matrice diagonale par sa “racine” :

$$S := P \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

car $S^2 = P\sqrt{D}P^{-1}P\sqrt{D}P^{-1} = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1} = PDP^{-1} = {}^tTT$. On obtient pour S la matrice

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

On remarque que S est symétrique. Ce qui n'est pas un hasard parce que S est le produit de trois matrices dont la matrice diagonale est clairement symétrique et $P^{-1} = {}^tP$.

4. Il faut résoudre l'équation $RS = T$, on obtient donc

$$\begin{aligned}R = TS^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

On vérifie ${}^tR\,R = {}^t(TS^{-1})TS^{-1} = {}^t(S^{-1}){}^tTTS^{-1} = {}^t(S^{-1})SSS^{-1} = {}^t(S^{-1})S$. En utilisant la symétrie de S on obtient que ${}^tR\,R = I$ et on déduit que R est une isométrie de l'espace euclidien. Le déterminant de R est négative, donc plus précisément R est une réflexion.

Exercice 2. Donner la décomposition polaire des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Corrigé :

Multiplie ${}^tAA$ pour obtenir une matrice symétrique et donc diagonalisable :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Comme dans le premier exercice, on utilise $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{trace} A = 8$ et $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 12$. La solution est $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6$.

On obtient un premier vecteur propre, avec

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le noyaux est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui après normalisation est

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Le deuxième vecteur propre doit être orthogonale à e_1, donc

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice de passage de la base standard à celle donnée par (e_1, e_2) est

$$P := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour inverse

$$P^{-1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(car P est orthogonale).

La matrice S tq $S^2 = {}^tAA$ est obtenue par

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} .$$

On obtient la matrice R avec la relation (comparer avec l'exercice 1)

$$R = AS^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} .$$

Remarque : Pour les calculs on utilise le site https ://matrixcalc.org/fr/

On va maintenant traiter la matrice B en utilisant la même stratégie.

On obtient

$${}^tB\,B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} .$$

On voit qu'une des valeurs propres est $\lambda_1 = 1$, et que l'espace propre associé est engendré par les deux vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si on applique Gram-Schmidt, on trouve la base orthonormée

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On obtient l'autre valeur propre avec trace$({}^tB\,B) = 18 = 1+1+\lambda_2$, donc $\lambda_2 = 16$ et le vecteur propre correspondant est

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage cherchée est

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

La matrice S est

$$S = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

La matrice R est obtenue par

$$R = BS^{-1} .$$

Pour S^{-1} on trouve

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

donc

$$R = BS^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I$ (où I désigne la matrice identité).

1. Montrer que $A^2 = I$ puis que A est orthogonale.
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est A dans une base orthonormée ?

Corrigé :

(1) Comme A est symétrique réelle, elle peut être diagonalisé sur $\mathbb{R}$. Ce qui veut dire que l'on trouve une matrice P inversible tq

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

On a $A^k = I$, alors $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}IP = I$, donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} .$$

Celui implique que $\lambda_1^k = \cdots = \lambda_n^k = 1$, mais les seuls nombres réelles dont une puissance donne 1 sont 1 et -1. Dans ces deux cas, c'est aussi vrai que $\lambda_j^2 = 1$, donc $A^2 = I$.

(2) Soit u l'endomorphisme dont la matrice est A. Dû à la symétrie de A, on sait que u est par rapport au produit scalaire standard auto-adjoint.

Donc $\langle u(v), u(w)\rangle = \langle u^*u(v), w\rangle = \langle u^2(v), w\rangle$ quelque soient les vecteurs v, w. En utilisant $u^2 = \mathrm{Id}$, on voit que $\langle u(v), u(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, ce qui implique que u est une isométrie et en fait, une involution isométrique.

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Corrigé :

Pour pouvoir travailler avec le *Théorème spectral*, on aurait besoin d'un produit scalaire. On remarque que nous pouvons associer à n'importe quelle base $e_1, \ldots, e_n$ de E un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définie par

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

c'est-à-dire, $\langle a_1e_1 + \cdots + a_ne_n, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n\rangle = \sum_{j=1}^n a_jb_j$ et en particulier, on voit que la base $e_1, \ldots, e_n$ est orthonormée par rapport à ce produit.

"$\Leftarrow$" : Soit maintenant $e_1, \ldots, e_n$ la base de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Le *Théorème spectral* garantie qu'un endomorphisme auto-adjoint par rapport à un produit scalaire est toujours diagonalisable.

Ici, à priori aucun produit scalaire n'est donné, et on va utiliser le produit associé à la base $e_1, \ldots, e_n$. Celle-ci est orthogonale par rapport à ce produit, ce qui implique que u est un endomorphisme auto-adjoint (par rapport au même produit) et donc diagonalisable.

"$\Rightarrow$" : Suppose que u est diagonalisable.

Alors il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E et une collection de réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tq $u(e_j) = \lambda_je_j$. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire sur E définie comme avant qui rend la base $e_1, \ldots, e_n$ orthonormée. Choisie deux vecteurs $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ et $w = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$ quelconques, alors

$$\begin{aligned}\langle v, u(w)\rangle &= \langle a_1e_1 + \cdots + a_ne_n, u(b_1e_1 + \cdots + b_ne_n)\rangle \\ &= \langle a_1e_1 + \cdots + a_ne_n, \lambda_1b_1e_1 + \cdots + \lambda_nb_ne_n\rangle \\ &= \lambda_1a_1b_1 + \cdots + \lambda_na_nb_n = \langle \lambda_1a_1e_1 + \cdots + \lambda_na_ne_n, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n\rangle \\ &= \langle u(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n), w\rangle = \langle u(v), w\rangle\ .\end{aligned}$$

Ça démontre que u est auto-adjoint par rapport à ce produit et à nouveau comme expliqué dans le cours, on sait qu'un endomorphisme est auto-adjoint si la matrice associée à une base orthonormée est symétrique.

Exercice 5. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A énumérées avec multiplicité. Montrer l'identité $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

Corrigé :

La trace d'une matrice A est la somme de tous ses coefficients sur la diagonale et en particulier on sait que la trace est invariant sous conjugaison avec une matrice inversible, c'est-à-dire,

$$\mathrm{trace}(A) = \mathrm{trace}(P^{-1}AP)$$

pour toute matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans le cas considéré ici, comme A est diagonalisable, on trouve une matrice P inversible tq $A = P^{-1}DP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\operatorname{trace} A^2 = \operatorname{trace}\bigl(P^{-1}DPP^{-1}DP\bigr) = \operatorname{trace}\bigl(P^{-1}D^2P\bigr) = \operatorname{trace} D^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \ ,$$

c'est qui correspond à un côté de l'idéntité que nous voulons prouver.

Si la matrice A a des coefficients $\bigl(a_{ij}\bigr)_{i,j}$, on trouve que le carré A^2 a des coefficients $\bigl(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk}\bigr)_{i,k}$ et la trace de A^2 est

$$\operatorname{trace} A^2 = \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}\Bigr) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}a_{ji} \ .$$

Comme A symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et par conséquent $a_{ij}a_{ji} = a_{ij}^2$, finalisant la preuve.

Exercice 6. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qui diagonalise $u^* \circ u$.
2. Montrer que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale.
3. On suppose dans cette question que u est bijectif. Montrer que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthogonale de E puis déterminer une base orthonormée de E.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux matrices U et V orthogonales telles que UMV est diagonale.
Indication : on pensera à utiliser la formule de changement de bases (pour des bases différentes au départ ainsi qu'à l'arrivée).
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible.
   (a) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique. La famille trouvée à la question 2 est-elle une base ?
   (b) Construire à l'aide de cette famille une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(u) \oplus (\operatorname{Im}(u))^{\perp}$.
   (c) Montrer que le résultat de la question 4 est encore vrai.

Corrigé :

1. D'abord rappelons nous que $u^* \colon E \to E$ est l'endomorphisme qui est définie par

$$\langle u^*(v), w\rangle = \langle v, u(w)\rangle$$

pour tout $v, w \in E$. Cette définition implique (en croyant qu'elle a un sens) que $u^* \circ u$ est auto-adjoint :

$$\begin{aligned}\bigl\langle (u^* \circ u)(v), w\bigr\rangle &= \bigl\langle u^*\bigl(u(v)\bigr), w\bigr\rangle = \bigl\langle u(v), u(w)\bigr\rangle = \bigl\langle u(w), u(v)\bigr\rangle \\ &= \bigl\langle u^*\bigl(u(w)\bigr), v\bigr\rangle = \bigl\langle (u^* \circ u)(w), v\bigr\rangle = \bigl\langle v, (u^* \circ u)(w)\bigr\rangle \ .\end{aligned}$$

Le théorème spectral nous dit qu'un endomorphisme auto-adjoint peut être diagonalisé par rapport à une base orthonormée.

2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres de $u^* \circ u$. Pour chaque $e_j \in \mathcal{B}$ il existe un $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tq $(u^* \circ u)(e_j) = \lambda_j \, e_j$. Avec ça on vérifie

$$\begin{aligned} \big\langle u(e_i), u(e_j) \big\rangle &= \big\langle u^*\big(u(e_i)\big), e_j \big\rangle = \big\langle u^*\big(u(e_i)\big), e_j \big\rangle \\ &= \big\langle \lambda_i \, e_i, e_j \big\rangle = \lambda_i \, \big\langle e_i, e_j \big\rangle = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est bien une famille orthogonale.

3. Tous les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont tous des réels positives, car si $v \in E$ est le vecteur propre pour un λ et $\|v\| = 1$, alors

$$\lambda = \lambda \, \|v\|^2 = \lambda \, \langle v, v \rangle = \langle \lambda \, v, v \rangle = \big\langle (u^* \circ u)(v), v \big\rangle = \big\langle u(v), u(v) \big\rangle = \|u(v)\|^2 \geq 0 \, .$$

Si u est injectif, clairement aucun de valeurs propres λ_j ne peut pas être 0 car sinon e_j serait un vecteur dans $\ker u \subset \ker u^* \circ u$.

On obtient que $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base car si un des $u(e_j)$ pourrait s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs restant, on aurait

$$u(e_j) = a_1 \, u(e_1) + \cdots + a_{j-1} \, u(e_{j-1}) \quad + \quad a_{j+1} \, u(e_{j+1}) + \cdots + a_n \, u(e_n) \, ,$$

mais le produit scalaire de cette équation avec $u(e_j)$, donne $\|u(e_j)\|^2 \neq 0$ à gauche et à cause de l'orthogonalité toujours 0 à droite, ce qui est une contradiction.

Comme tous les λ_j sont strictement positifs, on peut poser

$$e_1' := \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \, u(e_1), \ldots, e_n' := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \, u(e_n)$$

et on vérifie facilement comme en partie (2), que $e_1', \ldots, e_n'$ est une base orthonormée de E.

4. Par la partie (1) on sait que ${}^tMM$ peut être diagonalisée par une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit P la matrice de passage correspondante. Alors $(P^{-1})^tMMP = D$ est diagonal et comme $P^{-1} = {}^tP$ (car P est orthogonale), on peut réécrire $D = {}^tP^tMMP = {}^t(MP)MP$.

Si on pose $V := P$ et $U := D' \, {}^t(MP)$ et on multiplie l'équation précedente avec la matrice

$$D' := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}^{-1} \end{pmatrix} ,$$

on obtient que $D' \, {}^t(MP)MP = UMV$ est une matrice diagonale.

La matrice V est orthogonale par définition, et on vérifie pour U en utilisant $PDP^{-1} = {}^tMM$ que

$$\begin{aligned} \big(MP \, {}^tD'\big) \big(D' \, {}^t(MP)\big) &= MPD^{-1} \, {}^tP \, {}^tM = MPD^{-1}P^{-1} \, {}^tM = M(PDP^{-1})^{-1} \, {}^tM \\ &= M({}^tMM)^{-1} \, {}^tM = MM^{-1}({}^tM)^{-1} \, {}^tM = I \, . \end{aligned}$$

Alors U est aussi orthogonale et on a finie la preuve de partie (4).

5. À partir de maintenant M n'est pas inversible.

(a) Si M n'est pas inversible, u n'est pas bijectif et en particulier, $\ker(u) \neq \{0\}$. Celui montre que 0 est valeur propre de $u^* \circ u$. Il y a donc au moins un vecteur e_j avec $u^* \circ u(e_j) = 0$. Avec le même calcul qu'en partie (2), on trouve pour ce e_j que $0 = \big\langle u^* \circ u(e_j), e_j \big\rangle = \big\langle u(e_j), u(e_j) \big\rangle = \|u(e_j)\|^2$. On obtient donc que $e_j \in \ker u$ et $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ ne peut pas être une base de E.

(b) Réordonne la base $\big(e_1, \ldots, e_n\big)$ pour que les premiers k vecteurs ne soient pas dans le noyau de u et que les $n-k$ restant s'annulent tous quand on y applique l'endomorphisme u. Considère l'espace engendré par l'image des premiers k vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_k)$. Clairement $\mathrm{span}\big(u(e_1), \ldots, u(e_k)\big)$ est un sous-espace de $\mathrm{Im}(u)$, mais en fait les deux sous-espaces sont identiques car si $w \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe un $v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in \mathbb{R}^n$ avec $w = u(v)$ et on voit que

$$w = u\big(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\big) = a_1\, u(e_1) + \cdots + a_n\, u(e_n) = a_1\, u(e_1) + \cdots + a_k\, u(e_k)$$

appartient à $\mathrm{span}\big(u(e_1), \ldots, u(e_k)\big)$.
On choisie pour notre base $(f_1, \ldots, f_n)$ pour tout $j \in 1, \ldots, k$ les vecteurs

$$f_j := \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\, u(e_j)$$

et pour les restant $n-k$ vecteurs une base orthonormée de $\big(\mathrm{span}(f_1, \ldots, f_k)\big)^{\perp} = \big(\mathrm{Im}(u)\big)^{\perp}$. La base $(f_1, \ldots, f_n)$ a donc toutes les propriétés souhaitées. Remarque en particulier que $\lambda_j \geq 0$ et que $\lambda_j = 0$ si et seulement si $u(e_j) = 0$.

(c) Comme en partie (4), on a $(P^{-1})^t MMP = D$ (indépendement si M est inversible ou non) où P est la matrice de passage qui correspond à la base $(e_1, \ldots, e_n)$. La matrice D a les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0$ sur la diagonale et 0 sur le reste. Pour finir l'argument comme en partie (4), il faudrait former la matrice D', mais ça demanderait ici de diviser par 0.

Soit $\widehat{P}$ la matrice de passage de la base standard à la base $f_1, \ldots, f_n$. On définie $V := P$ et $U = {}^t\widehat{P}$. D'abord il est clair par construction que les deux matrices sont orthogonales et il ne reste à montre que UMV est diagonale.
Considère un vecteur $v_j \in \mathbb{R}^n$ de la forme ${}^t\big(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\big)$ où le 1 se trouve en j-ième position. L'image de Pv_j est e_j, on calcul donc $UMVv_j = UMPv_j = UMe_j$.
Si $j > k$, le vecteur e_j est dans le noyau de M et $UMVv_j = 0 \cdot v_j$. Si $j \leq k$, le vecteur $UMVv_j = UMe_j = \sqrt{\lambda_j}\, Uf_j = \sqrt{\lambda_j}\ {}^t\hat{P} f_j = \sqrt{\lambda_j}\ \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, f_j \rangle\, v_i = \sqrt{\lambda_j}\ \langle f_j, f_j \rangle\, v_j = \sqrt{\lambda_j}\, v_j$.
Dans les deux cas, le vecteur v_j est envoyé sur un multiple de v_j. Ce qui implique que la matrice UMV est bien diagonale.