Devoir n°4

Exercice 1 On fixe a et b deux nombres réels distincts. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (b-a)P'\left(\frac{a+b}{2}\right) - P(b) + P(a)\,.$$

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifiez votre réponse par une démonstration rigoureuse.
2. Calculer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Sans aucun calcul supplémentaire, en déduire la relation suivante :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X]\,, \quad (b-a)P'\left(\frac{a+b}{2}\right) = P(b) - P(a)\,.$$

Exercice 2

1. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Im}(f)\,. \tag{1}$$

2. On suppose dorénavant que f est l'application donnée par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x+y+7z \\ x+3y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que f est bien une application linéaire.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(f+\operatorname{Id})$ (resp. $\operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Ker}(f-2\operatorname{Id})$) est une droite vectorielle et en donner une base (ε_1) (resp. (ε_2), (ε_3)).
   (c) Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. L'inclusion (1) est-elle nécessairement vraie pour $\lambda = 0$?
   (d) Donner la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Exercice 3

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{2X^3+1}{X^4-X^3-X+1}$.
2. Déterminer toutes les primitives de la fonction $t \mapsto \frac{2t^3+1}{t^4-t^3-t+1}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 4 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue fixée.

1. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}\,.$$

2. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star\,, \quad S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx\,.$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ et tout $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$\left|(1-x)^2 - \left(1-\frac{k}{n}\right)^2\right| \leq \frac{2}{n}\,.$$

(b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.

3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue fixée.

   (a) On suppose que g est de classe C^1.

      i. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que
      $$\forall (x,y) \in [0,1]^2\,, \quad |g(x) - g(y)| \leq M|x-y|\,.$$

      ii. En déduire que
      $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\ dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx \qquad (\star)$$

   (b) (Bonus) Montrer que $(\star)$ est toujours vraie (même sans l'hypothèse supplémentaire de la question précédente que g est de classe C^1).

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Soient
$$\mathcal{C} = \left\{ v \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; v \circ u = u \circ v \right\}$$
et
$$\mathcal{P} = \left\{ a_0 \mathrm{Id} + a_1 u + ... + a_{n-1} u^{n-1} \;\middle|\; (a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \right\}\,.$$
On rappelle que, pour $v \in \mathcal{L}(E)$, v^2 est une notation pour désigner $v \circ v$, v^3 pour $v \circ v \circ v$ etc.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.
3. Soit $e \in E$. On note alors $e_0 = e$, $e_1 = u(e)$,..., $e_{n-1} = u^{n-1}(e)$ et on suppose que $(e_0, e_1, ..., e_{n-1})$ est une base de E.

   (a) Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{C}$.
   Indication pour montrer $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$: si $v \in \mathcal{C}$, on pourra d'abord montrer qu'il existe un unique n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v(e) = a_0 e_0 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1}$.

   (b) Donner la dimension de $\mathcal{C}$.