Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020
Fondamentaux des Mathématiques 2 26 février 2020

Devoir surveillé 2

Attention ! Une partie importante de la notation portera sur la rigueur de la rédaction mathématique et la qualité de la présentation.

Exercice 1 On définit la fonction réelle f par

$$f(x) = \frac{x(\pi - x)(\pi + x)}{\sin x}, \qquad \text{pour } x \in]0, \pi[.$$

1. Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Dans la suite de l'exercice, on notera encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en π.
4. Calculer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.
NB : quand vous vérifierez vos calculs, notez que le nombre π^2 apparaît souvent dans les coefficients. On pourra aussi noter, à toutes fins utiles, que f se prolonge en une fonction paire sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
5. Quelle est l'équation de de la tangente au graphe de f au point A d'abscisse 0 ?
6. Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage du point A ?

Exercice 2 Pour une suite réelle (u_n), on s'intéresse à la propriété suivante :

$$u_n = n + o(n) \qquad \text{lorsque } n \to +\infty. \tag{P}$$

1. Soit $v_n = \ln(2\,\mathrm{sh}\,(n) + 1)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite (v_n) vérifie la propriété (P).
2. Soit (u_n) une suite quelconque de nombres réels strictement positifs vérifiant la propriété (P). Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln n$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Est-il vrai que $e^{u_n} \sim e^n$ lorsque $n \to +\infty$? Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple.
4. On suppose de plus que $\lim_{n \to +\infty}\{u_n - n\} = 2$. Donner un équivalent simple de e^{u_n} lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3 Soient F_1 et F_2 les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ suivants.

1. $F_1 = F \cup G$, où $F = \{(2\alpha, \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x - 2y = 0\}$
2. $F_2 = H \cap K$, où $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x + y = 0\}$ et $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 - 2x + y^2 = 0\}$.

F_1 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$? Et F_2 ? On donnera une preuve détaillée ou un contre-exemple explicite dans chaque cas.