Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020
Cursus préparatoire : Fondamentaux des mathématiques 2

Feuille n° 8 : Applications linéaires

Exercice 1 ($*$) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$.
2. $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$.
3. $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_3(x, y, z) = xyz$.
4. $f_4 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_4(x, y) = (\sin x, \cos y)$.
5. $f_5 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_5(x, y, z) = (y, z, z)$.
6. $f_6 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (10, 11, 12)$.
7. $f_7 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
8. $f_8 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f(x) = (x, 2x, -3x)$.

Exercice 2 ($*$) Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $\varphi_1 : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$, $\varphi_1(P) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$.
2. $\varphi_2 : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^2$, $\varphi_2((u_n)_{n\geqslant 0}) = (u_0, u_1)$.
3. $\varphi_3 : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, $\varphi_3((u_n)_{n\geqslant 0}) = (u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant 0}$.
4. $\varphi_4 : C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $\varphi_4(f) = \left[x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}\right]$.
5. $\varphi_5 : C^0([0, 1], \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $\varphi_5(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 ($*$) Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$ définie pour tous α, β réels par

$$f(\alpha, \beta) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et préciser sa dimension.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des applications linéaires surjectives de $\mathbf{C}^4$ sur $\mathbf{C}^6$.
2. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{C}^4$ dans $\mathbf{C}^3$.
3. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^3$.

Exercice 5 ($*$) On note $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et on y définit les applications φ, ψ par

$$\varphi(f) = f' \quad \text{et} \quad \psi(f) = \left[x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

1. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E, puis déterminer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
2. Les endomorphismes φ et ψ sont-ils injectifs ? surjectifs ?

Exercice 6 ($*$) Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par
$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$. Préciser le rang de f.
4. A-t-on $\mathbf{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$?
5. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\mathrm{Im}\, f$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 7 Dans chacun des cas suivants, déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $g : E \to E$.

1. $E = \mathbf{R}^3$, $g(x, y, z) = (x - y, -x + y, 0)$.
2. E est un espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3), et g est l'unique application linéaire qui vérifie $g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) = e_1 + e_2$.

Exercice 8 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ défini par $u(a, b, c) = (-b + 2c, 2a - 3b + 4c, a - b + c)$, et soit $v = u + \mathrm{id}$.

1. Déterminer une base de $\ker u$.
2. Quel est le rang de u ? Déterminer une représentation cartésienne de $\mathrm{Im}\, u$.
3. Quel est le rang de v ? Quelle est la dimension de $\ker v$?
4. Montrer que pour tout $x \in \ker v$, on a $u(x) = -x$. En déduire que $\ker v \subset \mathrm{Im}\, u$, puis que $\ker v = \mathrm{Im}\, u$.
5. Montrer que $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.
6. Montrer que pour tout $x \in \ker u$, on a $u^3(x) = u(x)$, et que pour tout $x \in \ker v$, on a $u^3(x) = u(x)$. *On rappelle que par définition, u^3 est égal à $u \circ u \circ u$.*
7. Montrer que $u^3 = u$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x+2y+z, y+3z, 2x-2y+4z)$.

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 10 (∗) Soit $u : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par $u(P) = (1 - X^2)P' + 2XP$.

1. Vérifier que u est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $P_1(X) = (X + 1)^2, P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = (X - 1)^2$. Vérifier que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$. Exprimer $u(P_1), u(P_2)$ et $u(P_3)$ comme combinaisons linéaires de P_1, P_2 et P_3. En déduire la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3).

Exercice 11 (∗) Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts et $\varphi \colon \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}^{n+1}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1) \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est injective.
2. Montrer que pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = x_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.
3. Comment montrer que pour tout $(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n+2}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X]$ tel que $P(a_i) = x_i$ et $P'(a_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$?

Exercice 12 Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels tous distincts.

1. Vérifier que pour tout i, $\varphi_{a_i} : P \mapsto P(a_i)$ est une forme linéaire sur E.
2. Montrer que la famille $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est libre. *On pourra, à un moment, utiliser le résultat de la question 2 de l'exercice précédent.*
3. Montrer qu'il existe un unique $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i).$$

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \colon E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $\ker u \subset \ker(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}\, u$.
2. Montrer que $\ker u \oplus \mathrm{Im}\, u = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, u \cap \ker u = \{0\}$.
3. Montrer que $\ker u \oplus \mathrm{Im}\, u = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2 \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2$.
4. Dire si $\mathrm{Im}\, u$ et $\ker u$ sont supplémentaires dans $E = \mathbf{R}^3$ dans les deux cas suivants : $u(x,y,z) = (x - 2y + z, x - z, x - 2y + z)$; $u(x,y,z) = (2(x + y + z), 0, x + y + z)$.

Exercice 14 Soient E un k-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\dim \ker u$ ne peut être égal ni à 0, ni à 3.
2. En supposant que $\dim \ker u = 2$, montrer que $\ker u = \ker u^2$, puis que $u^2 = 0$.
3. Que vaut $\dim \ker u$?

Exercice 15 Soit u un endomorphisme d'un espace E tel que $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id} = 0$.

1. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1} en fonction de u.
2. Montrer que $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id})$.

Exercice 16 Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On considère $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.