Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 5 février 2020

Devoir surveillé n° 1
Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice 1 Échelonner en lignes la matrice A suivante, puis déterminer son noyau. Vous ferez apparaître vos opérations et toutes les étapes de votre algorithme de calcul.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 On note I la matrice identité de $M_3(\mathbf{R})$ et on considère $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes ; elles ont chacune pour but de calculer M^n pour tout $n \geqslant 0$.

1. Soit $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$.
   (a) Calculer A^2 et A^3. En déduire, *en la démontrant*, une expression simple de A^n pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) En procédant par récurrence, montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que
   $$\forall n \geqslant 0,\ M^n = I + u_n A.$$
   On vérifiera que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.
   (c) Calculer u_n en fonction de n. *Indication : considérer $v_n = u_n - 1$.*
   (d) En déduire une expression du coefficient de M^n situé en première ligne et première colonne.
2. Soit $J = \dfrac{1}{4}(M + 3I)$.
   (a) Calculer J^2 puis J^n pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) Calculer M^n en fonction de n, I et J pour tout $n \geqslant 1$. *On rappelle la formule du binôme : si A et B sont deux matrices telles que $AB = BA$, alors $(A + B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.*
   (c) En déduire une expression du coefficient de M^n situé en première ligne et première colonne.

Exercice 3 On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1 - x^2})$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{-x_0, x_0\}$ pour une valeur de $x_0 > 0$ à déterminer.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{-x_0, x_0\}$.
4. En déduire une expression plus simple de f sur $[0, x_0[$ et sur $]x_0, 1[$.
5. Donner l'allure du graphe de f. *Vous expliquerez en particulier comment vous aurez tracé la partie du graphe correspondant à $[-1, 0]$.*

Exercice 4 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que f a des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$, notées respectivement ℓ et ℓ'.

1. Représenter graphiquement une fonction f vérifiant ces hypothèses.
2. (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$, et tels que :
   $$\forall x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[,\ \ \min(\ell, \ell') - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \max(\ell, \ell') + \varepsilon.$$
   (b) En déduire que f est bornée sur $\mathbf{R}$.
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) > \max(\ell, \ell')$.
   (a) Montrer qu'il existe a, $b \in \mathbf{R}$ avec $a < x_0 < b$, et tels que : $\forall x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
   (c) En déduire que f atteint sa borne supérieure sur $\mathbf{R}$.
4. Si la fonction f ne vérifie pas l'hypothèse faite au début de la question 3, atteint-elle encore nécessairement sa borne supérieure sur $\mathbf{R}$?